

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Studijní program: B2612 – Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 3906T025 – Přírodovědné inženýrství

Model meziobratlové ploténky

Computer modelling of intervertebral disc

Diplomová práce

Autor: **Bc. Radim Doležal**

Vedoucí DP práce: Ing. Josef Novák, Ph.D.

Konzultant: Ing. Tomáš Souček

V Liberci 16. 5. 2008

Zadání

Prohlášení

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé DP a prohlašuji, že **s o u h l a s í m** s případným užitím mé diplomové práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom(a) toho, že užít své diplomové práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Datum

Podpis

Poděkování

Touto cestou bych chtěl poděkovat především vedoucímu diplomové práce Ing. Josefu Novákovi, Ph.D. stejně jako konzultantovi Ing. Tomáši Součkovi, za odborné vedení, trpělivost a pomoc při zpracování této diplomové práce.

Abstrakt

Model meziobratlové ploténky

Diplomová práce se zabývá problematikou zatížení meziobratlové ploténky v krční páteři.

Za pomoci programu ANSYS je vytvořen zjednodušený model ploténky krční páteře. Je vytvořena vlastní metoda simulace nelineární vláknenné struktury. Na model jsou aplikovány okrajové podmínky odpovídající reálnému zatížení ploténky hlavou ve středním anatomickém postavení a úklonu. Je zjištěno pole deformací a napětí a ukázána místa, ve kterých by mohlo dojít k poruše ploténky.

Klíčová slova:

modelování, ANSYS, meziobratlová ploténka, biomechanika

Abstract

Modelling of intervertebral disc

Diploma thesis deals with the problems of intervertebral disc in cervical spine.

There is created a simplified model of intervertebral disc. There is created an own method of simulation nonlinear fiber structure in anulus. There are applied boundary condition corresponding with real loads in the model. The distribution of mechanical strain and stress are shown.

Keywords:

modelling, ANSYS, intervertebral disc, biomechanics

Obsah

Prohlášení	4
Poděkování	5
Abstrakt	6
Obsah	8
Seznam použitých zkratk a symbolů	10
Úvod	11
1. BIOMECHANIKA	12
1.1 Definice biomechaniky	12
1.2 Význam biomechaniky	13
2. LIDSKÉ TĚLO	14
2.1 Označení směrů a rovin těla	14
2.2 Anatomie páteře	15
2.2.1 Páteř	15
2.2.2 Funkce	17
2.2.3 Pohyblivost	17
2.2.4 Obratle	19
2.2.5 Meziobratlová destička	20
2.2.6 Vazy	21
3. STAVBA MEZIOBRATLOVÉ DESTIČKY	23
3.1 Chrupavčité destičky	23
3.2 Nucleus pulposus	23
3.3 Anulus fibrosus	24
3.4 Poruchy meziobratlové destičky	25
4. ELASTICKÉ VLASTNOSTI BIOLOGICKÝCH MATERIÁLŮ	27
4.1 Izotropní a anizotropní materiály	27
4.2 Ortotropní materiály	28
4.2.1 Kompozitní materiály	28
4.2.2 Příčně izotropní materiály	29
4.2.3 Výpočet materiálových konstant jednoduchého kompozitního materiálu	29
4.3 Nelineární materiály	31

5. BIOMECHANIKA MEZIOBRATLOVÉ DESTIČKY	33
5.1 Moderní výzkum meziobratlové destičky	33
5.2 Materiálové vlastnosti meziobratlové destičky	33
5.3 Použité vědecké výzkumy	34
5.4 Počítačová simulace zatížení ploténky.....	36
5.5 Různé přístupy při modelování.....	37
6. TVORBA POČÍTAČOVÉHO MODELU.....	38
6.1 Úvod do modelování	38
6.2 Důležitost modelování.....	38
6.3 Prostředí ANSYS	39
6.4 Tvorba zjednodušeného válcového modelu ploténky.....	39
6.4.1 Model chrupavčitých destiček	39
6.4.2 Model nucleu	41
6.4.3 Model anulu.....	42
6.4.4 Výsledný model.....	48
6.5 Rozměry modelu	49
6.6 Zadání okrajových podmínek	49
7. VÝSLEDKY ZJEDNODUŠENÉHO VÁLCOVÉHO MODELU PLOTÉNKY.....	52
7.1 Namáhání ploténky v rovnovážně poloze.....	53
7.2 Namáhání ploténky při úklonu/záklonu/předklonu.....	58
8. MODEL MEZIOBRATLOVÉ PLOTÉNKY SE SKUTEČNOU GEOMETRIÍ	64
9. SROVNÁNÍ S KLINICKOU PRAXÍ	66
Závěr	67
Použitá literatura:.....	68
Struktura příloh na CD.....	70

Seznam použitých zkratk a symbolů

E	modul pružnosti v tahu (tzv. Youngův modul)
ε	poměrná deformace
ν	Poissonův poměr
G	střížný modul
T	tenzor elastického napětí
S	tenzor elastických deformací
c	tenzor elastických modulů
V_i	objemový podíl
u_x	posunutí ve směru osy x
u_y	posunutí ve směru osy y
u_z	posunutí ve směru osy z
E_{low}	modul pružnosti v tahu charakterizující nelineární chování vláken anulu v oblasti napětí mezi 0 a 100 kPa
E_{medium}	modul pružnosti v tahu charakterizující nelineární chování vláken anulu v oblasti napětí mezi 100 a 500 kPa
E_{high}	modul pružnosti v tahu charakterizující nelineární chování vláken anulu v oblasti napětí mezi 500 kPa a 1 MPa

Úvod

Prvním cílem této diplomové práce bylo kompletní seznámení se s problematikou fungování páteře a jejích jednotlivých součástí. Páteř má v organismu člověka mnoho důležitých rolí a její správná funkčnost je základním předpokladem, pro možnost kvalitního života jedince.

V dnešní době se neustále zvyšují požadavky na schopnosti člověka. Tyto požadavky přímo i nepřímo vedou na neustále se zvyšující fyzické požadavky na lidské tělo. Sedavý způsob života bez aktivní fyzické námahy však tyto požadavky nesplňuje. Špatné způsoby cvičení, neschopnost správně ohodnotit vlastní fyzické schopnosti a různé nehody pak vedou k bolestem a v horším případě k vážným úrazům páteře.

Tělo zažívá extrémní situace na které není z předchozího evolučního vývoje připraveno.

Na druhou stranu dochází k neustálému zlepšování lidských vědomostí ve všech vědních oborech a tedy i v lékařství. Tyto vědomosti pomáhají lidem lépe pochopit hranice organismu a dokáží i lépe pomoci lidem, kteří tyto hranice překročili. Nové operace a léčebné metody dokáží pomáhat tam, kde dříve žádná pomoc nebyla.

Velmi nápomocná věda v tomto ohledu je biomechanika. Stojí na rozhraní oborů a využívá tedy jak lékařské znalosti, tak znalosti z oblasti mechaniky a matematiky. Využívá moderních matematických a fyzikálních popisů.

Tato diplomová práce se řadí právě do této oblasti. Jejím úkolem je pomocí matematicko-fyzikálního popisu úloh lineární i nelineární elasticity, popsat rozložení sil na jedné z nejproblematictějších partií páteře – meziobratlové ploténce.

Pomocí software využívající metodu konečných prvků vytvořit model a aplikovat na něj okrajové podmínky odpovídající reálnému zatížení ploténky.

Z rozložení mechanických sil na tomto modelu pak najít místa s největším namáháním, ve kterých by mohlo docházet k poškození ploténky.

1. Biomechanika

Za zakladatele Biomechaniky se všeobecně považuje Giovanni Alfonso Borelli (1604 – 1680), který napsal první fundamentální studii tohoto oboru, DE MOTU ANIMALIUM [1]. O něco později se Angličan Hook zabýval mechanickými vlastnostmi materiálů (např. Hookův zákon) a velmi jej fascinovaly i vlastnosti svalu.

20. století - století výbušného technologického rozvoje, přineslo celou řadu praktických otázek pro biomechaniku (handicap válečných veteránů, nové stroje a jejich ovládání, rozvoj sportu - zejména jeho vrcholová forma, hygiena a bezpečnost práce, automobilismus, letectví a kosmonautika, rozsáhlý výskyt degenerativních chorob atd.). Technologický rozvoj ale také výrazně obohatil metodologický arsenál biomechaniky, což umožnilo řadu fundamentálních objevů.

V moderní době pak pokračuje v jejich díle celá řada většinou anonymních profesionálních biomechaniků, kteří se sdružují v celé řadě národních a mezinárodních odborných a vědeckých organizacích (např. ISB - International Society of Biomechanics). Vědecká a odborná výchova biomechaniků se také stala běžnou na vysokých školách všech rozvinutých zemí světa [1].

1.1 Definice biomechaniky

Biomechanika je mezioborová disciplína, která se zabývá mechanickou strukturou, mechanickým chováním a mechanickými vlastnostmi živých organismů a jeho částí. Dále pak mechanickými interakcemi mezi nimi a vnějším okolím. Její mezioborovost spočívá jak v integraci metodických a poznatkových prostředků z klasických oborů (morfologie, fyziologie, matematika, fyzika, a biofyzika, kybernetika, technická mechanika, nauka o materiálech, atd.), tak v šíři aplikačních směrů (klinické lékařské obory, technické obory, společenské obory, přírodní vědy, zemědělské obory, ekologie, atd.).

Biomechanika člověka je obor studující strukturu, vlastnosti chování člověka a jeho biomechanické interakce na různé rozlišovací úrovni (makrobiomechanika a mikrobiomechanika) [1].

1.2 Význam biomechaniky

Biomechanika jako vědní obor zažívá období nebývalého růstu. Stává se důležitým mostem mezi lékaři a inženýry. Množství oborů kterých se dotýká a jejich vlastní rozvoj jí dává dostatek nástrojů k dalšímu vývoji a lepšímu pochopení chování lidského těla. Význam biomechaniky je velký a bude nadále růst.

2. Lidské tělo

Hranice fyzických možností moderního trénovaného člověka se neustále posunují. Každý rok jsou překonávány nové rekordy v rychlosti, síle a vytrvalosti, kterých dosahují atleti, gymnasté a jiní sportovci. Tyto výkony ukazují schopnost těla zvýšit kapacitu plic, efektivněji využívat srdce, vypěstovat silnější svaly a dosáhnout větší pružnosti různých částí těla.

V zemích, kde je dostatek potravin a dodržuje se základní hygiena, je průměrné lidské tělo vyšší a vydrží déle než v předchozích staletích. Díky lepšímu pochopení zdraví a tělesných funkcí se lidé učí, jak se po celý život udržovat v dobré kondici. I když dnes lidé vedou hlavně sedavý způsob života, vyvinuli metody, jak vyhovět potřebě pravidelné fyzické námahy. Jejich prospěšnost je nesporná, na druhou stranu některé špatně zvládnuté cviky a snaha o bezhlavé sportovní výkony mohou vést k vážným úrazům. Úrazy samozřejmě vznikají i zásluhou různých nehod v moderním uspěchaném světě.

Právě vážné úrazy pohybového ústrojí patří k největším nástrahám pro lidské tělo v dnešní době.

2.1 Označení směrů a rovin těla

Protože se diplomová práce dotýká anatomie, je vhodné alespoň částečně využívat tradiční mezinárodně sjednocené názvosloví (Terminologia anatomica). Protože se však názvosloví časem vyvíjí a mnohdy nebylo všeobecně užíváno, můžeme se i dnes setkat v literatuře s určitými nomenklaturními problémy (např. annulus × anulus).

Pro naše potřeby bude stačit znát tato označení směrů (platí pouze pro trup):

superior – horní,

inferior – dolní,

anterior – přední,

posterior – zadní; je stejné jako

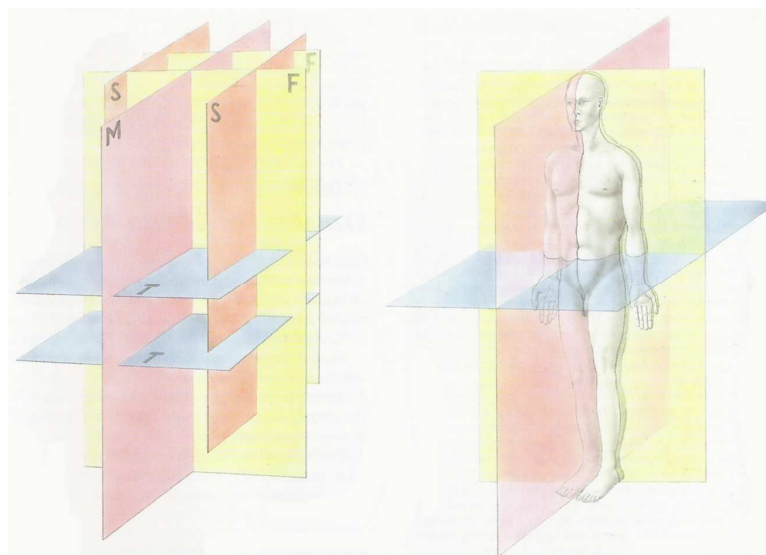
ventralis – přední,

dorsalis – zadní,

lateralis – zevní, vnější (lat. latus, bok);

internus – vnitřní,

externus – zevní.



Obr. 2.1: Prostorové znázornění rovin těla. M - rovina mediánní, S – rovina sagitální, R – roviny frontální, T – roviny transversální [4].

2.2 Anatomie páteře

V této kapitole poskytneme pouze základní a zjednodušené poznatky o páteři, které jsou však postačující pro potřeby této diplomové práce.

2.2.1 Páteř

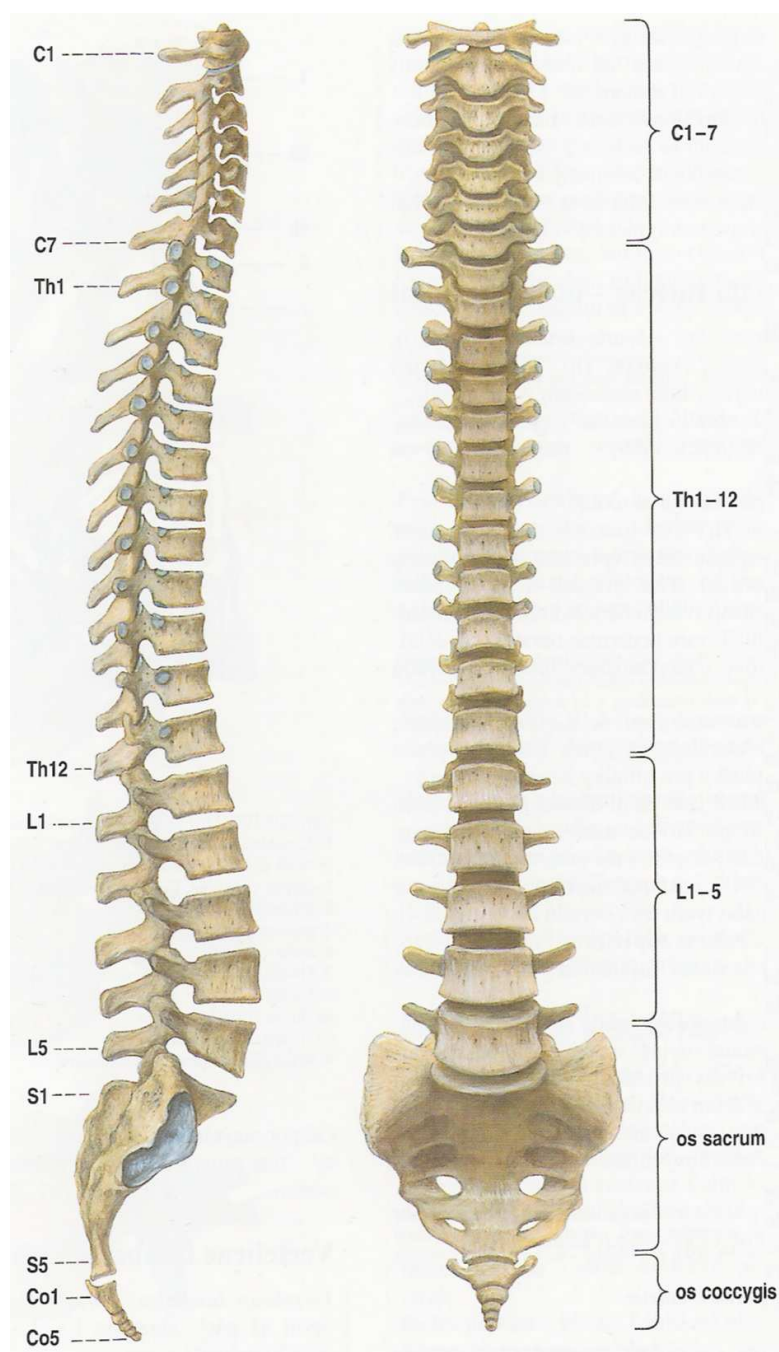
Páteř (columna vertebralis) tvoří osu vzpřímeného těla na kterou se připevňuje pletenec horních a dolních končetin a na které začínají svaly trupu. Páteř se skládá z 33 – 34 obratlů [2].

Její délka je 70 – 75 cm. Je důležitá pro stavbu a pohyblivost těla (pohyb hlavy, trupu), jsou na ni napojena žebra a celý hrudní koš a má proto význam i pro dýchací

pohyby. Nese hmotnost hlavy i dalších částí trupu a přenáší jí na pánev a dolní končetiny.

Páteřním kanálem prochází mícha a mezi obratli vycházejí míšní nervy. U člověka, který má vzpřímený postoj je vystavena velkým tlakům, zejména v dolní části bederního úseku [3].

Páteřní spoje charakterizuje: stabilita, pevnost a v některých úsecích i omezená pohyblivost. Omezení pohyblivosti je výhodné pro konečnou stabilitu páteře. Je také vhodné z hlediska ochrany míchy.



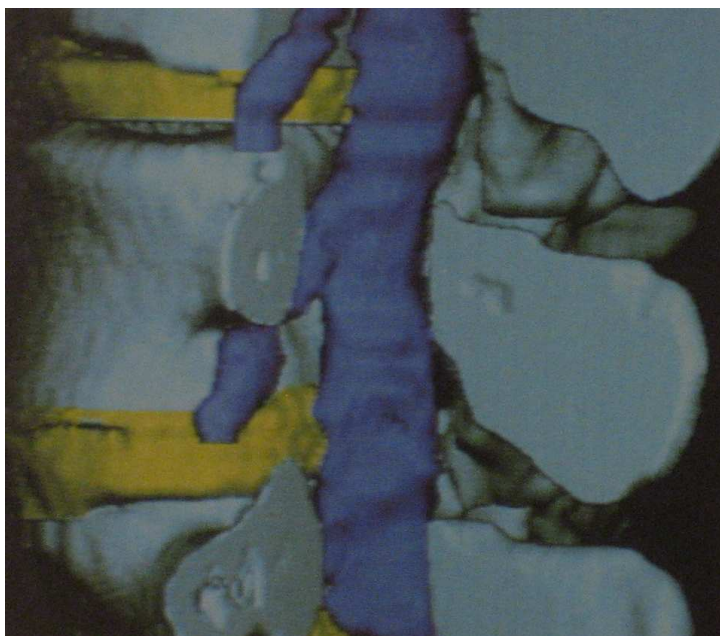
Obr. 2.2: Anatomie páteře [4].

2.2.2 Funkce

Jak již bylo ukázáno páteř plní v organismu několik funkcí. Především jsou to tři základní:

- ochranná úloha pro nervový systém
- statická funkce pro udržení rovnováhy hlavy, trupu a ostatních částí těla
- dynamická funkce pohybu zajišťovaná kloubními mechanizmy a aktivně svalovým systémem.

Nervový systém i kloubní mechanismus zobrazuje obrázek 2.3.



Obr. 2.3: CT snímek páteře s odstraněnými částmi obratlů tak aby byly dobře viditelné meziobratlové destičky (žlutá) a mícha s jejími nervy (modrá) [5].

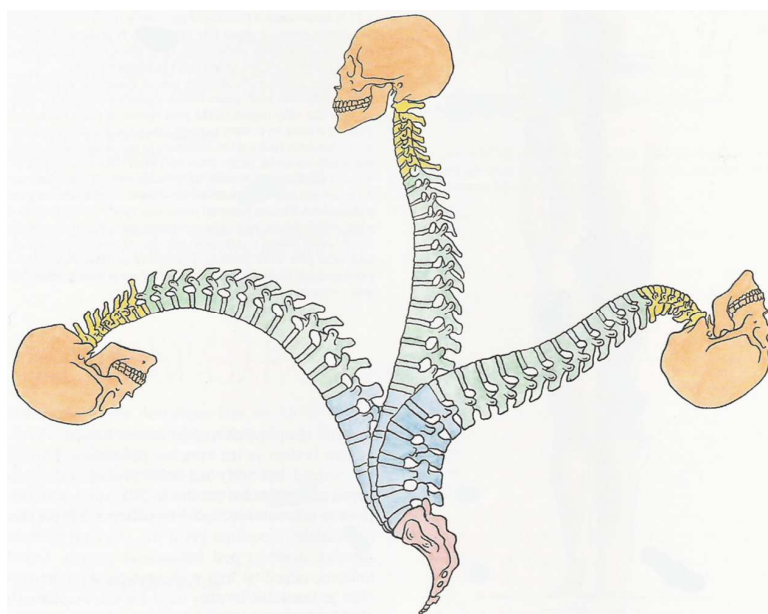
2.2.3 Pohyblivost

Pohyblivé spojení zajišťují meziobratlové klouby. Drobné posuny v těchto kloubech se sčítají, takže malá pohyblivost mezi jednotlivými obratli je do určité míry kompenzována možností "pohybového součtu", tj. možností složení drobných pohybů v jednotlivých spojích, čímž vznikne výsledný pohyb většího rozsahu. Jednotlivé úseky

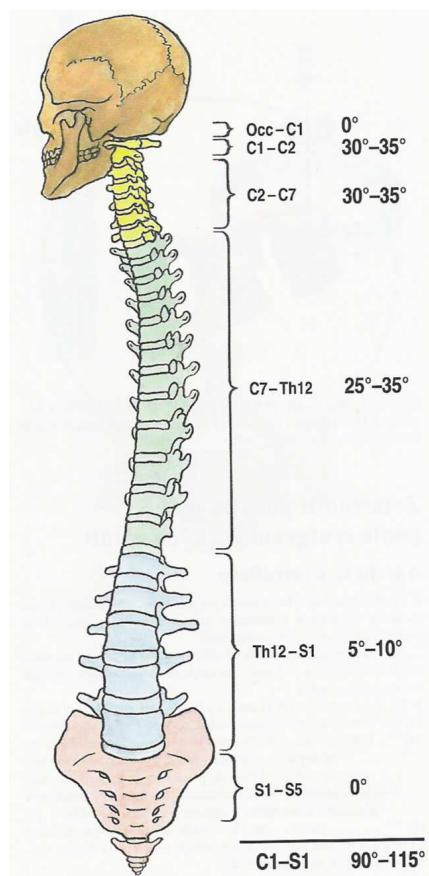
páteře jsou však nesterjné pohyblivé. Možnosti výsledného rozsahu pohybů páteře zobrazují obrázky 2.4 a 2.5.

Základní dělení pohybů, které je páteř schopna vykonávat je:

- předklon, záklon (anteflexe, retroflexe),
- úklon (lateroflexe),
- otáčení (rotace-torze),
- translace (střížný pohyb),
- pružné tlumení při zatížení (elastické deformace ploténky)



Obr. 2.4: PŘEDKLONY A ZÁKLONY PÁTEŘE; schematické znázornění maximálních možností pohybů v jednotlivých úsecích páteře [4].



Obr. 2.5: ROTACE PÁTEŘE; možnosti rotace v jednotlivých úsecích páteře a souhrnné rotace (k jedné straně) [4].

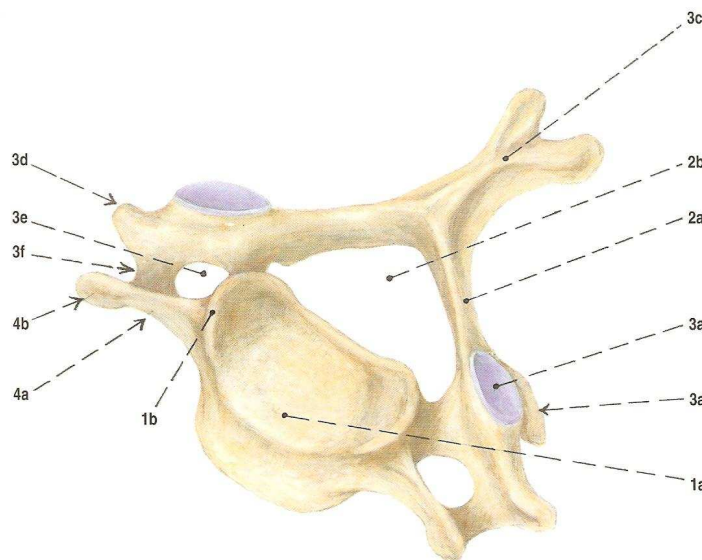
2.2.4 Obratle

Obratle (vertebrae) jsou krátké kosti nepravidelného tvaru s výběžky. Rozeznáváme sedm krčních obratlů, dvanáct hrudních obratlů, pět bederních obratlů, pět křížových obratlů srůstajících v jednu křížovou kost a čtyři až pět kostrčních obratlů spojených v kostrční kost.

Obratle mají jednotnou stavbu. Základ tvoří tělo, ze kterého vybíhá oblouk s výběžky. Oblouk s tělem uzavírá obratlový otvor. Sloupce obratlů utvářejí kostěný páteřní kanál, ve kterém leží mícha a kořeny míšních nervů.

Obratlové výběžky: dva příčné, čtyři kloubní a jeden trnový výběžek slouží ke vzájemnému spojení obratlů a k připojení žeber. Výběžky tvoří i kostěné plochy pro upevnění svalů. V příčných výběžcích druhého až sedmého krčního obratle jsou otvory, kterými probíhají páteřní tepny zásobující mozkový kmen, mozeček a část mozku.

Obratle se vzájemně liší velikostí těl (nejmenší těla mají krční a naopak největší bederní obratle), délkou trnových výběžků a dalšími tvarovými detaily. Svoji stavbou jsou značně odlišné první dva krční obratle – nosič (atlas) a čepovec (axis).



Obr. 2.6: Stavba krčního obratle C5; nejdůležitější části: 1a – obratlové tělo, 2a – obratlový oblouk, 3c – trnový výběžek, 3a – kloubní ploška [4].

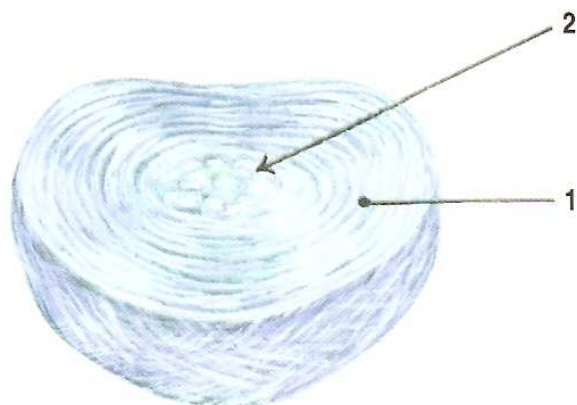
2.2.5 Meziobratlová destička

Meziobratlové destičky (disci intervertebrales) jsou různě vysoké pružné chrupavky vsunuté mezi těla obratlů. Z celkové délky páteře připadá na meziobratlové destičky asi 20 – 25 % délky [2].

Nejvyšší destičky jsou v bederním úseku páteře. Páteř je v tomto úseku velmi pohyblivá, ale také nejsnáze zranitelná roztržením nebo vysunutím destičky. Poměrně nízké jsou meziobratlové destičky v krčním úseku páteře.

Meziobratlové destičky spojují těla obratlů a tedy i páteř do jednoho celku. Plní v páteři dvě základní funkce:

- statická funkce - působí jako tlumič
- dynamická funkce - umožňuje pohyb páteře



Obr. 2.7: Meziobratlová destička a její dvě hlavní části - 1 - vazivové prstence (Anulus fibrosus), 2 - vodnaté jádro (Nucleus pulposus) [4].

2.2.6 Vazy

Sval je upnut na kost prostřednictvím šlachy, vazů – ligamenta. Primární svazky kolagenních vláken jsou stočeny v sekundární svazky, podobně jako lano. Šlacha přechází ve vazivovou tkáň svalu.

Šlacha tvoří se svařem funkční komplex se značnými viskoelastickými vlastnostmi [1]. Podle uspořádání svalových vláken a jejich připojení ke šlaše je přenášena síla ze svalu na vlastní kost.

Mechanické vlastnosti jsou silně závislé na podílu základních strukturálních komponent: kolagenu a elastinu. Liší se výrazně umístěním, stářím a zátěžovou historií.

Vazy i šlachy jsou uzpůsobeny přenášení zatížení v tahu a vzhledem k viskoelastickým vlastnostem se projevuje jak tečení, tak zpevnění podle způsobu aplikace vnějšího zatížení.

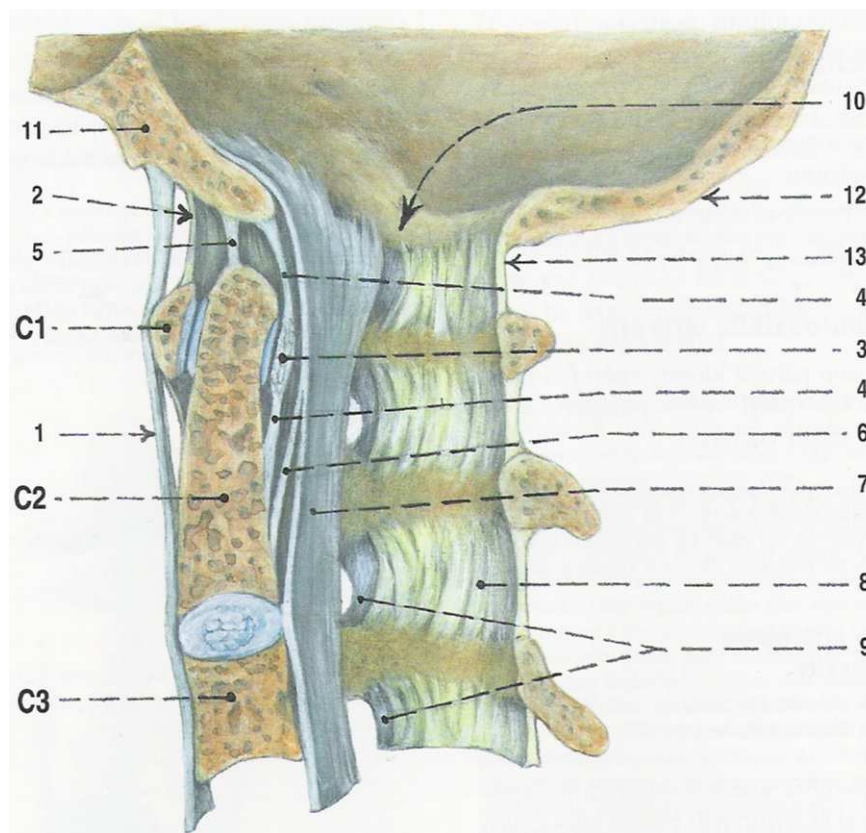
Vazy páteře zahrnují dlouhé vazy, které podélně poutají prakticky celou páteř a dále krátké vazy spojující oblouky a výběžky sousedních obratlů.

K dlouhým vazům páteře patří –

Ligamentum longitudinale anterius (přední podélný vaz) - spojuje obratlová těla po přední straně páteře od předního oblouku atlasu až na kost křížovou. Více lne k tělům obratlů než k meziobratlovým diskům.

Ligamentum longitudinale posterius (zadní podélný vaz) – spojuje obratlová těla po jejich zadní ploše, tedy po přední stěně páteřního kanálu, od týlní kosti až na kost křížovou. Lne pevněji k meziobratlovým destičkám než k tělům obratlů.

Zobrazení vazů v oblasti krční páteře je na obrázku 2.8.



Obr. 2.8: Podélný řez kraniovertebrálním spojením až po obratel C3; Dlouhé vazy páteře: 1- ligamentum longitudinale anterius, 7- ligamentum longitudinale posterius [4].

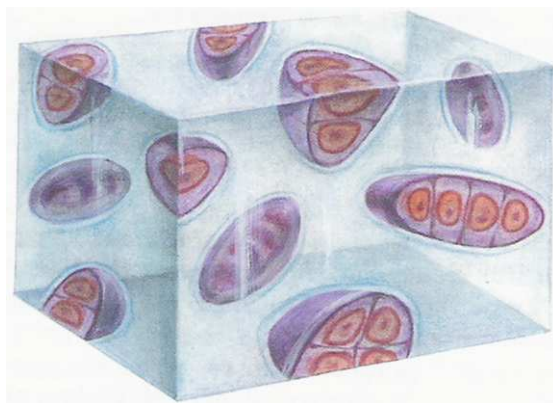
3. Stavba meziobratlové destičky

Meziobratlový disk (disci intervertebrales) sestává z několika tkání: z vazivového prstence, vodnatého jádra a z okrajové vrstvy hyalinní chrupavky. Nyní popíšeme jednotlivé části především z funkčního a lékařského hlediska.

3.1 Chrupavčité destičky

Meziobratlová ploténka přirůstá k tělům obratlů právě díky chrupavčítým destičkám. Chrupavka je pevná a tuhá pojivová tkáň. Přenáší tlakové zatížení v kloubním spojení a částečně tlumí rázové zatížení.

Hyalinní (sklovitá) chrupavka je v tenkých řezech poloprůhledná. Převažuje v ní mezibuněčná hmota, dosahuje až 95% objemu chrupavky. Ve světelném mikroskopu se jeví homogenní. Kolagenní fibrily (nitky, vlákénka), které chrupavka obsahuje jsou tenké a za normálních okolností neviditelné.



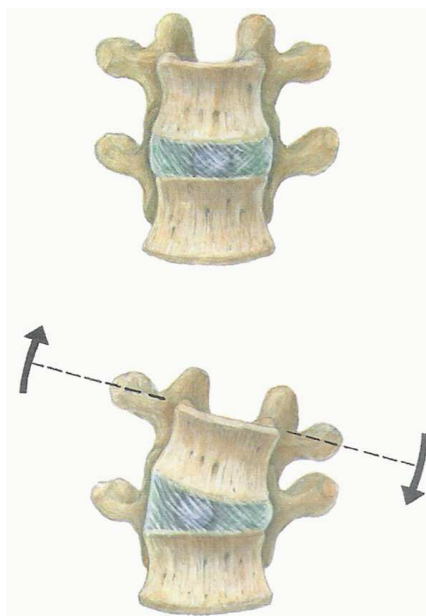
Obr. 3.1: Schematický model hyalinní chrupavky [4].

3.2 Nucleus pulposus

Pulpózní jádro (nucleus pulposus) je někdy zkráceně označovaném pouze nucleus. Jde o centrální část ploténky tvořené tekutinou (gelem). Při zatížení se jádro deformuje a tekutina je vytlačována směrem nejmenšího odporu. Prakticky nestlačitelná tekutina

se tak při pohybu poněkud posunuje od stlačované strany ke straně natahované. Množství a viskoelastická kvalita tekutiny je závislá na věku, namáhání a celkovém zdravotním stavu jedince.

Nucleus má kulovitý až diskovitý tvar uložený blíže dorsálnímu okraji disku.



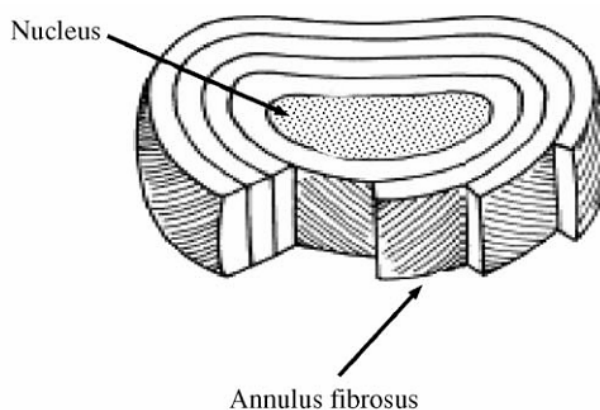
Obr. 3.2: Posun nucleu ke straně disku při náklonu obratlových těl [4].

3.3 Anulus fibrosus

Pulpózní jádro obklopuje vazivový prstenec (anulus fibrosus), často zkráceně označován jako anulus. Jde o válcovitou strukturu doléhající ze stran na nucleus. Anulus se skládá ze série vrstev zvané lamely. Vnější lamela je tedy vnějším okrajem anulu, potažmo celého disku.

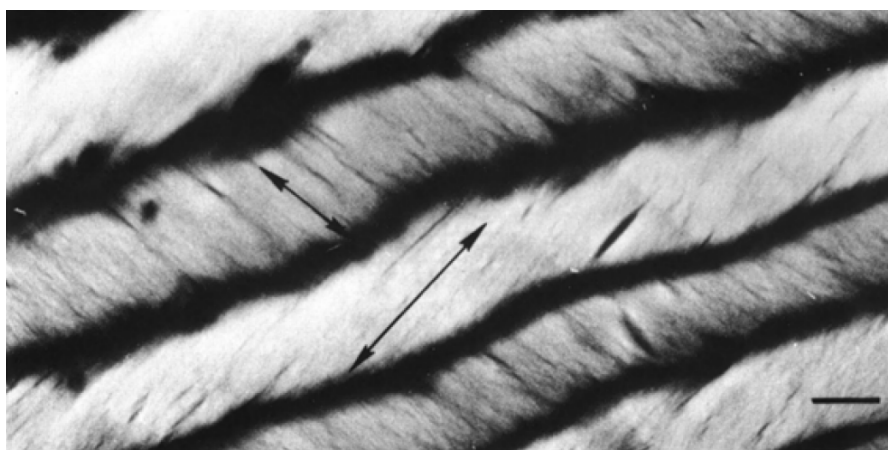
Lamely (z nichž právě nejvíce vnější) přecházejí směrem k tělům obratlů v hyalinní chrupavku a tento celek pak uzavírá jádro.

Jednotlivé lamely jsou menšími vazivovými prstenci tvořenými kolagenními vlákny uspořádanými do šroubovice. Směr těchto šroubovic se u sousedících lamel střídá. Okrajová lamela má vlákna křížně propletená a vytvářející tak strukturu s větší pevností.



Obr. 3.3: Schéma ploténky a jednotlivých lamel anulu [6].

Jednotlivá vlákna v lamelách anulu se při bližším pohledu skládají z menším vlákenek (fibrilů). Vláknem je tedy svazkem nitkových vlákenek. Orientaci těchto svazků je u sousedních vláken protiběžná opět z důvodů větší pevnosti.



Obr. 3.4: Mikroskopický pohled na sousední vlákna anulu (šipkami naznačena orientace svazků) [9].

3.4 Poruchy meziobratlové destičky

Prolaps meziobratlové ploténky - výhřez ploténky, přesněji jejího pulpózního jádra, způsobuje útlak míšních kořenů a kořenový syndrom. Vzniká nejčastěji v dolní bederní oblasti, vzácněji může postihnout i jiné úseky páteře. Někdy mu předchází mírnější bolesti, jindy vzniká náhle, mnohdy po prudkém či neobvyklém pohybu. Ploténka obvykle vyhřezává do strany (laterální prolaps), vzácněji může dojít k výhřezu

směrem do míšního kanálu (mediální prolaps). Podle postiženého kořene se rozvíjí příslušné příznaky. Při útlaku míšních sakrálních kořenů vznikají navíc obtíže v oblasti konečníku, močového měchýře a pohlavních orgánů. Při vyšetření lékař obvykle nachází stažení svalů okolo páteře, omezení hybnosti, poruchy citlivosti, charakteristické změny reflexů a při delším trvání i úbytek svalové hmoty. Léčba může být konzervativní (tj. klid, tlumení bolesti, obstríky, fyzioterapie aj.). Některé stavy však vyžadují včasný chirurgický zákrok [3].

4. Elastické vlastnosti biologických materiálů

Pružnost (elasticita) je část fyziky, která studuje vztahy mezi deformacemi těles a vnějšími silami, které na těleso působí.

V této části diplomové práce uvedeme pouze základní nejdůležitější informace o elastických vlastnost biologických materiálů souvisejících se stavbou meziobratlové destičky. V rozsahu této diplomové práce není možno uvést všechny potřebné vztahy z oblasti pružnosti.

4.1 Izotropní a anizotropní materiály

Izotropie je vlastnost, kterou se označuje nezávislost na směru. Označujeme-li tedy materiál za izotropní myslíme tím, že vykazuje nezávisle ve všech směrech stejné mechanické vlastnosti. Znamená to tedy, že všechny roviny procházející jedním bodem tělesa z tohoto materiálu jsou rovinami symetrie materiálových vlastností.

Biologické materiály jsou obecně anizotropní. Je to způsobeno jejich stavbou, kdy jsou často jedním ze základních prvků vlákna elastinu a kolagenu. Jejich poměrné zastoupení a prostorové uspořádání pak určuje míru anizotropie. V určitých případech můžeme materiál považovat za izotropní, aniž bychom se dopustili velké chyby. Příkladem může být hyalinní chrupavka, nebo například určité části kostní tkáně.

V případě lineární pružnosti platí pro anizotropní materiál zobecněný Hookův zákon (4.1). Ten vyjadřuje vztah mezi tenzorem napětí \mathbf{T} a tenzorem deformace \mathbf{S} .

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

T_{ij} jsou složky tenzoru napětí, S_{kl} složky tenzoru malých deformací, c_{ijkl} vystihují vlastnosti látky a nazýváme je elastickými moduly. Jsou složkami tenzoru čtvrtého řádu. Ten má obecně 81 prvků. Vzhledem k symetrii tenzoru napětí i deformace a z energetických úvah plyne že tenzor elastických modulů je symetrický. Počet

nezávislých složek tenzoru elastických modulů se tedy redukuje na nejvýše 21. Se vzrůstající symetrií materiálů počet nezávislých složek tenzoru elastických modulů dále klesá.

4.2 Ortotropní materiály

Jako ortotropní označujeme materiál, který má tři vzájemně kolmé roviny symetrie materiálových vlastností. Díky tomu má pouze 9 nezávislých složek tenzoru elastických modulů. Velmi často se mechanické vlastnosti ortotropního materiálu nevyjadřuje ve složkách tenzoru elastických modulů, ale pomocí těchto charakteristik:

E_1, E_2, E_3 - moduly pružnosti v tahu v hlavních směrech anizotropie.

G_{23}, G_{13}, G_{12} - moduly pružnosti ve smyku v rovinách rovnoběžných s příslušnou rovinou symetrie elastických vlastností.

$\nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$ - Poissonova čísla (též Poissonovy konstanty), u kterých první index odpovídá směru působícího normálového napětí a druhý směru, při němž vzniká příslušná deformace v příčném směru.

Přepočet těchto materiálových konstant na složky tenzoru elastických modulů je možný pomocí jednoduchých vztahů, uvedených v mnoha publikacích, např. i v [19].

4.2.1 Kompozitní materiály

Materiály s obsahem vláken (tedy typicky biologické tkáně tvořené vlákny elastinu a kolagenu) můžeme považovat za speciální druh kompozitních materiálů. Na poli kompozitních materiálů se setkáváme s pojmy, které charakterizují strukturu a symetrii této struktury a které mají zásadní význam pro mechanickou odezvu vláknových kompozitů. Významnou charakteristikou kompozitů je tedy právě symetrie jejich fyzikálních vlastností, která je zároveň odlišuje od většiny tradičních materiálů.

4.2.2 Příčně izotropní materiály

V teorii kompozitů se setkáváme s pojmem příčně (transverzálně) izotropní materiál (někdy také kvaziizotropní), který znamená, že daný kompozit je možno v makroskopickém měřítku považovat za izotropní v rovině vláknité výztuže. Mikroskopicky je však takový materiál anizotropní [19]. Jde prakticky o speciální druh ortotropního materiálu.

Je zřejmé, že se vzrůstající symetrií vlastností klesá počet materiálových konstant, které je nutno znát k úplnému popisu vztahů mezi napětím a deformací daného kompozitního tělesa. Příčně izotropní materiál má tedy 5 nezávislých prvků tenzoru elastických modulů. Opět se nejčastěji vyjadřuje stejnými materiálovými charakteristikami jako ortotropní materiál. Zjednodušení lze vyjádřit takto:

$$E_2 = E_3 \quad (4.2)$$

$$G_{12} = G_{13} \quad (4.3)$$

$$\nu_{31} = \nu_{21} \quad (4.4)$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (4.5)$$

Za příčně izotropní materiál můžeme považovat například rozvinutou lamelu anulu bez vlivu nelinearity.

4.2.3 Výpočet materiálových konstant jednoduchého kompozitního materiálu

Kompozitní materiál (zkráceně kompozit) je obecně materiál složený ze dvou, nebo více substancí s rozdílnými vlastnostmi. Biologické tkáně s obsahem vláken jsou zvláštním druhem kompozitního materiálu.

Pro výpočet makroskopických materiálových konstant kompozitu stačí v určitých případech znát materiálové vlastnosti jednotlivých složek kompozitu, jejich objemový podíl, případně geometrickou orientaci [18].

Jednosměrový kompozit je tedy charakterizován těmito konstantami:

V_m – objemový podíl matrice,

V_f – objemový podíl vláken,

ν_m – Poissonovo číslo matrice,

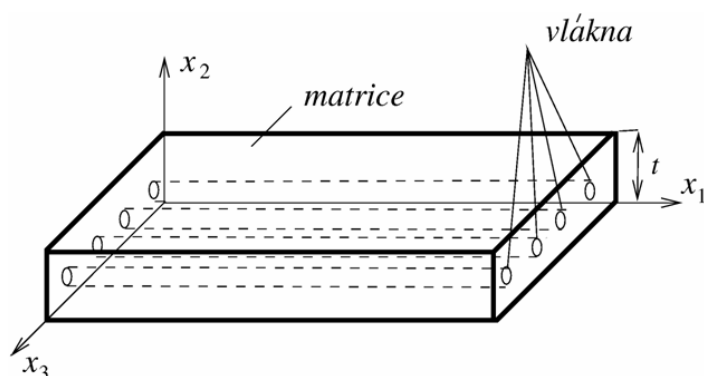
ν_f – Poissonovo číslo vlákna,

G_m – modul pružnosti ve smyku matrice,

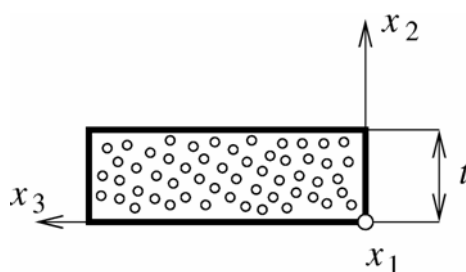
G_f – modul pružnosti ve smyku vlákna,

E_m – modul pružnosti v tahu matrice,

E_f – modul pružnosti v tahu vlákna.



Obr. 4.1: Schematický model jednosměrového kompozitu [19].



Obr. 4.2: Schematický model jednosměrového kompozitu [19].

Makroskopické mechanické konstanty výsledného příčně izotropního materiálu získáme použitím těchto výpočetních vzorců (pokud ztotožníme hlavní osu napětí se směrem orientace vláken v kompozitu):

$$E_1 = E_v V_v + E_m V_m \quad (4.6)$$

$$V_m = 1 - V_v \quad (4.7)$$

$$\nu_{23} = \nu_v V_v + \nu_m V_m \quad (4.8)$$

$$E_2 = \frac{E_m}{V_m + V_v \left(\frac{E_m}{E_v} \right)} \quad (4.9)$$

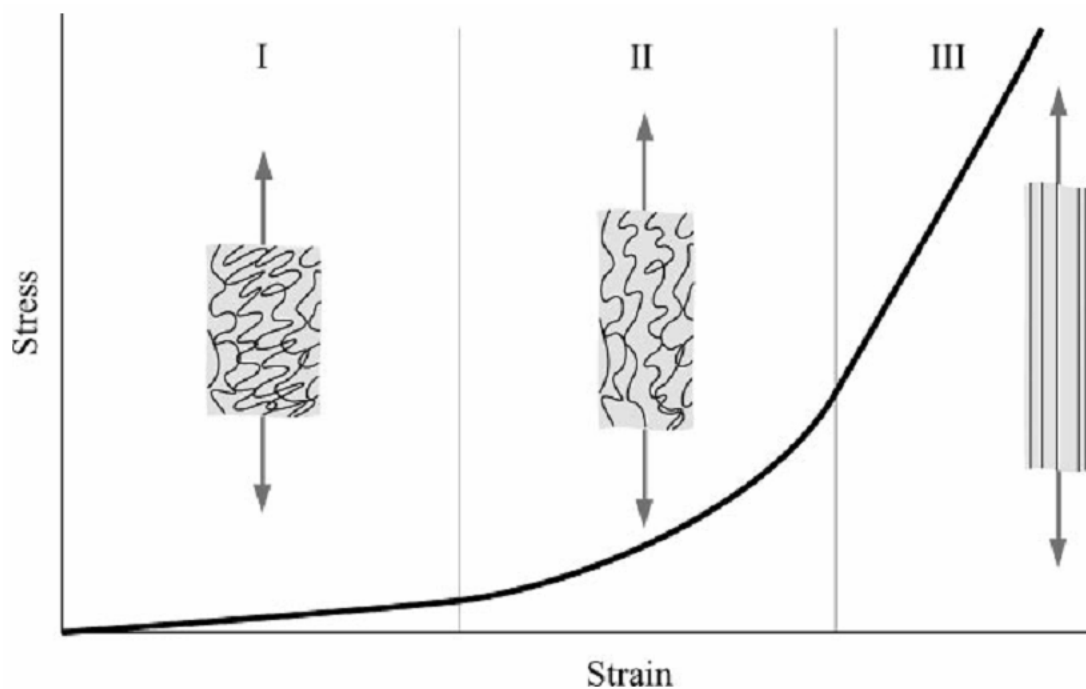
$$G_{12} = \frac{G_m}{V_m + V_v \left(\frac{G_m}{G_v} \right)} \quad (4.10)$$

Nutno podotknout že uvedené vztahy platí pro náš velmi zjednodušený příklad. V oblasti mechaniky kompozitů se můžeme setkat s pojmy jako je parametr efektivnosti výztuže, či dalšími numerickými faktory souvisejícími s tvarem a uspořádáním vláken. Tyto parametry výpočet výsledných koeficientů dále ztěžují a jejich aplikace na biologické materiály je dosti problematická.

4.3 Nelineární materiály

Uvedené vztahy platily pouze pro malé deformace u lineárních materiálů. Každý reálný materiál má však mez při které přestává být lineární. U technických materiálů tuto oblast označujeme jako mez úměrnosti. Za touto oblastí je již závislost napětí a deformace nelineární (nezaměňovat mez úměrnosti s mezí pružnosti, za níž vznikají trvalé deformace). Typickým diagramem tohoto případu je napětí-ově-deformační křivka oceli v tahu.

Biologické materiály naproti tomu vykazují jinou napětí-ově-deformační křivku, při které se s napětím zvyšuje tuhost.



Obr. 4.3: Schematický diagram typické napětově-deformační křivky biologické tkáně (v tomto případě kůže)[9].

Výpočet deformací nelineárních materiálů je obecně značně složitý. Jednotlivé části křivky jsou většinou alespoň na určitých oblastech linearizovány. Při praktickém výpočtu se pak využívají numerické metody.

Numerické metody výpočtu a sofistikovaný výpočetní software nám při výpočtu nelineárních materiálů účinně pomáhá. Více se problematice výpočtu deformací nelineárních materiálů budeme věnovat v kapitole o modelování.

5. Biomechanika meziobratlové destičky

Přibližně 70 procent populace v průmyslově rozvinutých zemích zažívá aspoň jednou za život bolest zad [13]. Pacienti potřebují dlouhotrvající péči a kvalita jejich života je limitována. Akutní případy hluboké bolesti v zádech mohou vést k vyřeznutí ploténky - mnohostranný proces, ve kterém se mechanické namáhání stejně jako věk a degenerační procesy navzájem kombinují a zesilují.

I proto se vědecký výzkum zaměřil na studium páteře a jejich jednotlivých částí.

5.1 Moderní výzkum meziobratlové destičky

Výzkumu chování meziobratlové destičky se dnes věnují vědecká pracoviště prakticky po celém světě. Vycházejí z již zjištěných vlastností a snaží se okruh znalostí dále rozšířit. Důraz se v posledním desetiletí klade především na použití moderní výpočetní techniky v oblasti matematicko-fyzikálního popisu chování ploténky. Vytvářejí se jednoduché i složité modely především na bázi metody konečných prvků o nichž se detailněji dozvíme později.

Výzkum se ubírá převážně dvěma směry – simulací samotné meziobratlové ploténky a zjištění rozložení sil v ní; dále pak simulací celých páteřních segmentů a rozložení sil při konkrétním namáhání páteře. V druhém případě není ani nutné aby model věrně odpovídal svou stavbou reálné ploténce, ale spíše aby ji pouze věrně simuloval z pohledu vnějších sil.

Tato diplomová práce se tedy řadí do hustěji zastoupené první kategorie.

5.2 Materiálové vlastnosti meziobratlové destičky

Materiálovým výzkumem jednotlivých struktur ploténky se lékařství zabývá již velmi dlouhou dobu. Již mnoho desetiletí se lékaři i fyzici snaží najít vhodný popis chování jednotlivých tkání.

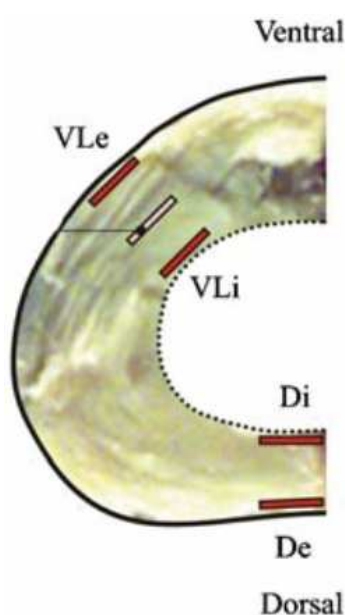
Ukázalo se, že změřit mechanické vlastnosti nucleu a chrupavčitých destiček patří k menším problémům. Správné a vhodné změření mechanických vlastností anulu je

však nadále otevřeným problémem. Zejména pro jeho složitou strukturu a silně nelineární chování.

Mnoho vědeckých týmů používá k popisu vláken anulu nelineární křivky naměřené již v šedesátých až osmdesátých letech minulého století. Nutno podotknout že s dobrými výsledky. Nejspíše proto, že metody měření se nerozvíjí tak bouřlivě jako jiné oblasti biomechaniky, věnuje se materiálovému výzkumu jen velmi málo pracovišť. Je zde tedy vidět i menší intenzita nových poznatků.

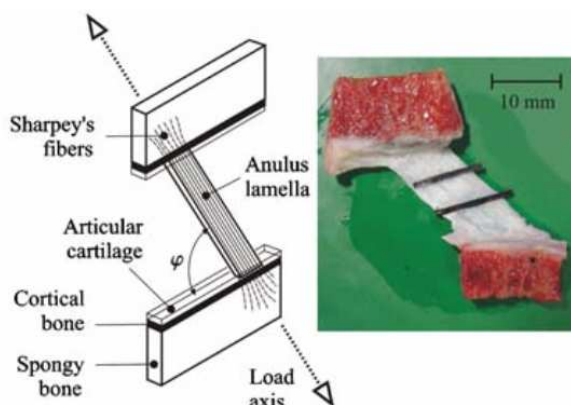
5.3 Použité vědecké výzkumy

Pro účely této diplomové práce byly použity závěry z poměrně nedávných výzkumů Gerharda A. Holzapfela (Institute of Biomechanics, Graz University of Technology). Ten se ve své práci [6] zaměřil mimo jiné na mechanické chování v samotných lamelách anulu. S ohledem na rozdílnou strukturu vláken v různých oblastech anulu, bylo provedeno měření ve čtyřech vybraných oblastech. Jde konkrétně o tyto oblasti: ventro-laterální externí (VLe), ventro-laterální interní (VLi), dorsální externí (De) a dorsální interní (Di). Naměřením mechanických vlastností vláken v těchto čtyřech oblastech by mělo být dosaženo poměrně přesné závislosti rozložení mechanických vlastností v celém anulu.



Obr. 5.1: Rozložení vzorků pro měření [6].

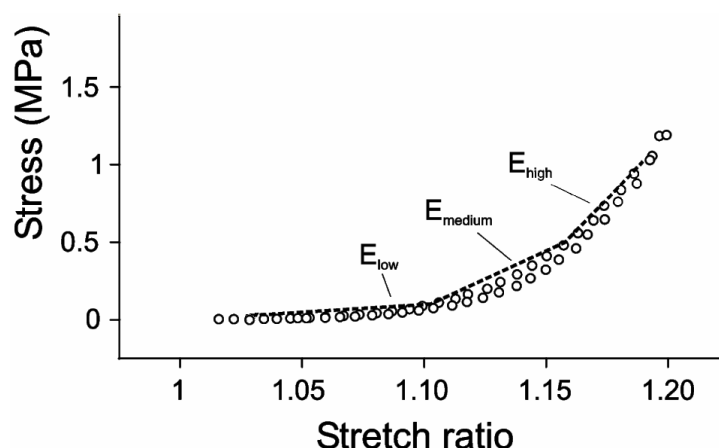
Měření bylo provedeno celkově na 11 ploténkách od dárců různého věku. Výsledky byly zpracovány statisticky a jsou tedy udávány i s přesností (tolerancí). Tvar vzorků respektoval směr vláken anulu. Kromě napětově-deformačních křivek bylo výsledkem měření i zjištění orientace (přesných velikostí úhlů) vláken ve vybraných oblastech anulu.



Obr. 5.2: Ukázka měřeného vzorku [6].

Výsledkem měření je typická napětově-deformační křivka odpovídající materiálu s obsahem kolagenních vláken. Narozdíl od mnoha technických materiálů se tuhost biologického materiálu s kolagenními vlákny s napětím zvětšuje. Zjednodušeně řečeno se s napětím teprve jednotlivé nejmenší kolagenní fibrily uvnitř svazků srovnávají do správného směru a zapojují se tak do přenosu síly.

Čtyři naměřené křivky odpovídají čtyřem vybraným oblastem anulu. Je z nich zřejmé, že vnější lamely jsou tužší než vnitřní. Naměřené nelineární křivky lze aproximovat třemi lineárními křivkami s různými Youngovými moduly – E_{low} , E_{medium} a E_{high} . Nejmenší modul E_{low} charakterizuje mechanické chování vláken v tahu v oblasti napětí mezi 0 a 100 kPa, střední modul E_{medium} pak mezi 100 a 500 kPa a největší modul E_{high} mezi 500 kPa a 1 MPa.



Obr. 5.3: Aproximace naměřené křivky třemi lineárními částmi [6].

Může vyvstat otázka, proč nelineární deformační charakteristika vlákna končí u hodnoty 1 MPa. Holzapfel [6] uvádí že při testování bylo velké procento vzorků nad touto hranicí zničeno. Při aplikaci napětí v oblasti mezi 4 MPa a 10 MPa je pak více jak 75% vzorků nevratně zničeno.

5.4 Počítačová simulace zatížení ploténky

Jak už bylo zmíněno – modernímu vědeckému výzkumu chování ploténky se dnes věnuje mnoho vědeckých pracovišť. Zaměřují se na počítačovou simulaci chování ploténky v některém z mnoha moderních simulačních programů.

Modely jsou většinou vytvořeny pomocí formulace MKP. Mezi nejrozšířenější programy patří ANSYS a ABAQUS.

K současným nejlepším pracím zpracovaných na toto téma patří jistě práce H. Schmidta [12]. Delší dobu se simulací meziobratlové ploténky věnuje R. Eberlein, nejprve pouze samotné ploténce [7] a poté i celému pátevnímu segmentu [8]. Práce v tomto oboru dále široce publikuje Shirazi-Adl [9] [10]. Tématu se věnují například i v Polsku [11]. Do výzkumu je tedy zapojen celý svět.

5.5 Různé přístupy při modelování

Meziobratlová ploténka se skládá z různých částí a různých biologických materiálů. Některé části modelu lze efektivně zjednodušit a použít velmi jednoduchý popis.

Projevuje se to nejčastěji při popisu nucleu. Někteří autoři popisují vodnaté jádro jako gel s hyperelastickými vlastnostmi, popsáný dvěma konstantami pro Mooney-Rivlin formulaci. Jiní ho modelují jako jednoduchý isotropní elastický materiál. Další pak zcela logicky popisují jádro jako kapalinu.

I anulus lze popsat mnoha různými způsoby. Někteří autoři modelují vlákna pomocí speciálních kompozitních elementů. Jiní používají vložené elementy nižších řádů.

Nelineární vlastnosti i složitý tvar vláken anulu se pak popisuje více či méně složitými matematickými popisy, velmi často vycházející z pokročilých nelineárních formulací materiálů.

6. Tvorba počítačového modelu

6.1 Úvod do modelování

Termínem model v širším smyslu označujeme reprezentaci reality, která se snaží zachovat vybrané vlastnosti objektu – tedy jen ty, které jsou v dané chvíli důležité [17].

Modelováním v našem kontextu budeme rozumět výpočet fyzikálních vlastností reálného objektu (meziobratlové ploténky) a probíhajících dějů, na základě vhodně zjednodušeného popisu zkoumaného objektu a fyzikálních principů na něm uplatněných.

V současnosti nejběžnější a obecně uznávaný postup modelování je numerické řešení, tedy řešení přibližné, které spočívá v tom, že původní nekonečněrozměrná úloha je nahrazena konečněrozměrnou úlohou (tzv. diskretizace). Hledáme tedy hodnoty funkce ve vybraných bodech tělesa a původní diferenciální rovnice je nahrazena soustavou algebraických rovnic (sadou vztahů mezi příslušnými bodovými hodnotami).

Pro numerické řešení fyzikálních úloh, především metodou konečných prvků, existuje velké množství softwaru, obvykle konstruovaného pro určitou oblast technických aplikací (stavebnictví, strojírenství, tepelná zařízení, aerodynamika, geotechnika, elektrotechnika).

Moderní software se snaží maximálně uživatele odpoutat od matematického pozadí a nabídnout dobře vyváženou škálu automatických nastavení tak, aby s přirozenou intuicí získal uspokojivé řešení. Složitější a efektivnější výsledek sebou nese nutnost lepšího pochopení základních používaných metod.

6.2 Důležitost modelování

Výhod zjišťování fyzikálních vlastností pomocí matematického numerického modelu je velmi mnoho. V technické praxi se užívá nejvíce z důvodu nižší ceny oproti fyzickým experimentům. V oblasti biomechaniky jde často o jediný možný způsob zjištění vnitřních fyzikálních vlastností a dějů.

6.3 Prostředí ANSYS

ANSYS Multiphysics je špičkový profesionální software pro technologický vývoj.

Jde o programový balík založený na bázi metody konečných prvků. Je určený pro řešení rozsáhlých lineárních i nelineárních (fyzikálně i geometricky) úloh mnoha různých kategorií: strukturální, teplotní, teplotně-mechanické, elektromagnetické, akustické apod.

Slovo Multiphysics znamená, že na jediný model v tomto programu lze užít širokou škálu fyzikálních jevů a vypočítat tak různé výsledky pro různé kategorie uplatnění [14].

6.4 Tvorba zjednodušeného válcového modelu ploténky

Věrný třírozměrný model ploténky krční páteře má poměrně složitou geometrii. Tvořit model a ověřovat různé formulace materiálových popisů přímo na této geometrii se od začátku jevilo jako dosti problematické. Jako optimální se tedy jevil způsob „od jednoduššího k složitějšímu“.

Tvar ploténky lze nejlépe zjednodušit do prostého tvaru válce. Zjednodušení je to hrubé a schematické.

Válcový model však dokáže simulovat chování ploténky a zároveň díky výhodnému tvaru dovoluje i jednoduché zadávání materiálových vlastností a rychlý výpočet výsledků.

6.4.1 Model chrupavčitých destiček

Mechanické vlastnosti kloubní chrupavky jsou dány především uspořádáním vláken a tekutiny mezibuněčné hmoty. Vlákná kolagenu a elastinu vytvářejí pórovitou substanci prostoupenou tekutinou. Obecně je chrupavka tedy tkáň anizotropní a nehomogenní.

V našem modelu však budeme chrupavku považovat za izotropní materiál. Toto zjednodušení je používáno i v [13] a [7] s dobrými výsledky. Můžeme si ho dovolit i

s ohledem na malý objem těchto chrupavek vůči objemu celé ploténky. Hodnoty elastických vlastností jsou [13] :

Youngův modul pružnosti:

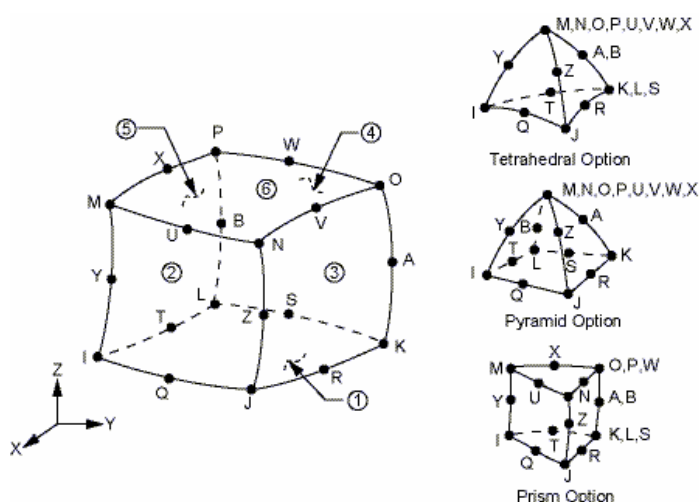
$$E = 23,8 \text{ Mpa},$$

Poissonův poměr:

$$\nu = 0,4.$$

V ostatních pracích autoři uvádějí naprosto stejné materiálové vlastnosti (maximálně odlišné o desetinu Mpa).

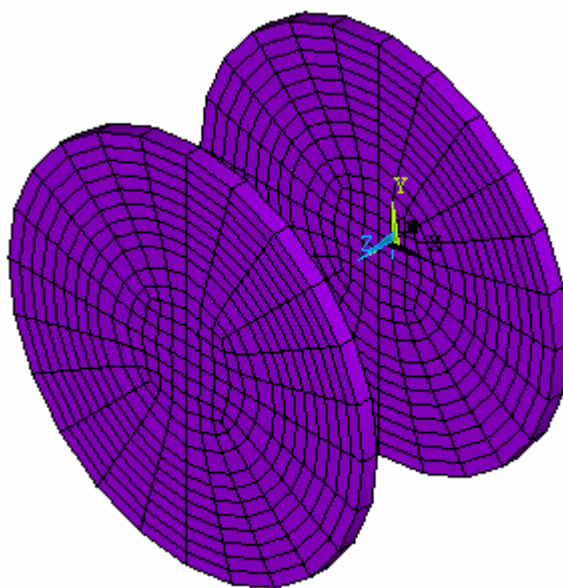
Použitý element pro chrupavku byl SOLID186.



Obr. 6.1: Schéma elementu SOLID186 [16].

Jde o objemový element vyššího řádu s dvaceti uzly. Má uzly tedy jak v krajních bodech elementu, tak na jeho hranách. Jeho stupně volnosti mu dovolují řešit napětově-deformační úlohy. Element podporuje čtyři typy tvarů – kvádr, tříboký hranol (v anglické terminologii prism), čtyřboký jehlan (angl. pyramid) a tříboký jehlan (angl. tetrahedron).

Jestliže je užit jiný tvar než kvádr, jsou některé uzly společné. V našem případě jsme při vytváření modelu chrupavky využili tento element v základním tvaru – tedy kvádru.



Obr. 6.2: Síť elementů tvořící model chrupavek.

6.4.2 Model nucleu

Nucleus byl modelován jako částečně stlačitelná kapalina. Stlačitelnost je reprezentována elastickým modulem. V našem případě byly v souladu s [13] zvoleny tyto materiálové konstanty:

Youngův modul pružnosti:

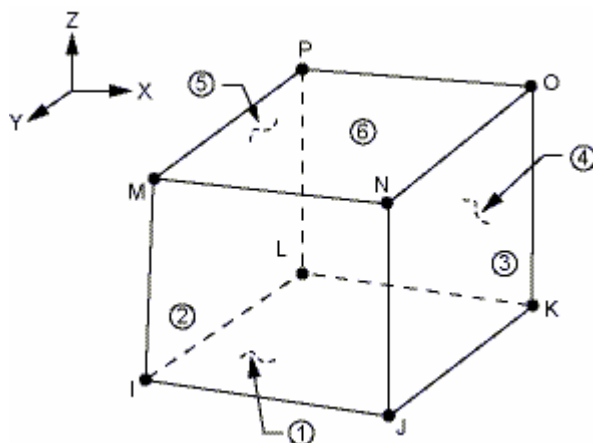
$$E = 3 \text{ Mpa},$$

Poissonův poměr:

$$\nu = 0,4.$$

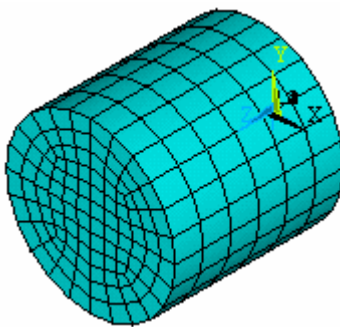
Protože literatura [13] uvádí možnost poměrně velkého rozsahu Youngova modulu (0,1 – 4 Mpa), byl experimentálně v modelu změněn modul o řád výše i níže. Na chování celého modelu ploténky to mělo zanedbatelný vliv. Model nucleu musí věrně modelovat především mechanické chování kapaliny – tedy přenášení tlaku všemi směry.

Pro model byl zvolen element FLUID80:



Obr. 6.3: Schéma elementu FLUID80 [16].

Jde o element reprezentující tekutiny, který dovoluje jak statické, tak dynamické úlohy – tedy i výpočet proudění. Má osm uzlů.



Obr. 6.4: Síť elementů tvořící model nucleu.

6.4.3 Model anulu

Anulus fibrosus je bezesporu nejtěžší částí celého modelu. Pro jeho složitou strukturu, kombinaci funkcí které v ploténce zajišťuje i proto, že nelineární chování vláken, z kterých je složen, je jeho předností a proto jí lze těžko zanedbat.

Problematika modelování meziobratlové ploténky je především problematikou modelování chování anulu.

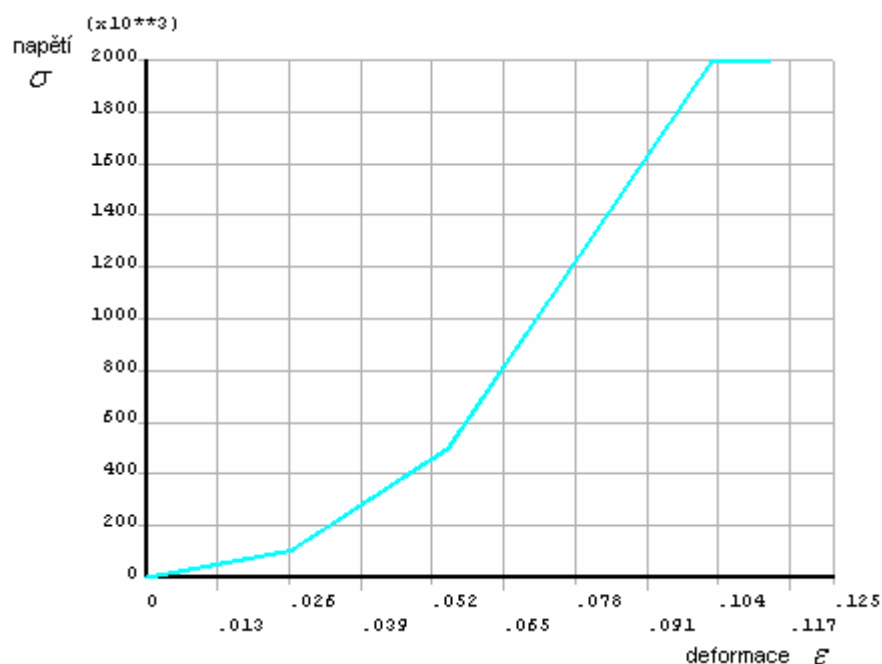
Z hlediska modelování má anulus dvě základní vlastnosti – jde o strukturu tvořenou vlákny, tedy o určitý druh kompozitu. Na takovýto materiál můžeme z makroskopického hlediska hledět jako na materiál ortotropní. Druhou vlastností je

nelinearita vláken. Pro každou z těchto vlastností nabízí ANSYS prostředky a nástroje, jak je řešit. Jejich kombinace však není právě jednoduchá.

6.4.3.1 Nelineární materiálové modely v prostředí ANSYS

Program ANSYS má implementován nástroj pro řešení nelineárních úloh elasticity. Nelineární napětově-deformační křivky mohou být definovány mnoha různými způsoby a formulacemi. Jde o více, či méně složité formulace, které mohou zahrnovat i viskoelasticitu apod. Pro jednotlivé formulace stačí uživateli zadat pouze vhodné parametry.

Pro simulaci materiálových vlastností nelineárního materiálu, získaných z naměřených dat, které mají už sami o sobě diskrétní charakter, se nejčastěji používá multilineární formulace. Při této formulaci se do tabulky zadají jednotlivé naměřené body nelineární charakteristiky. Chování materiálu mezi těmito body předpokládáme jako lineární.



Obr. 6.5: Graf multilineární elasticity.

6.4.3.2 Ortotropní model vláknenné struktury

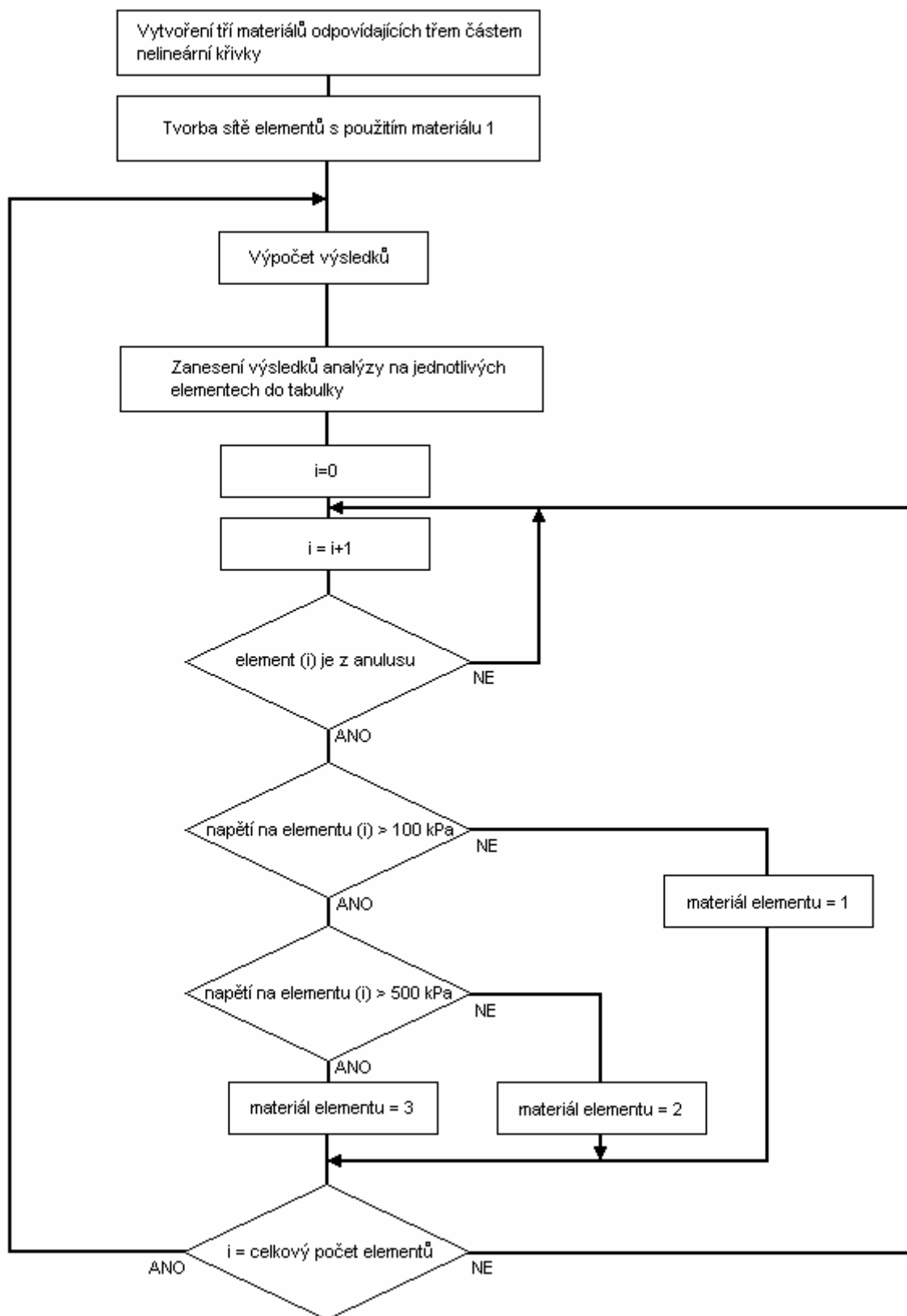
Program ANSYS dovoluje jednoduše vytvořit model ortotropního materiálu pomocí zadání devíti materiálových konstant (kap. 4.2). Výpočet těchto konstant z mikroskopických materiálových vlastností jednotlivých částí anulu pomocí vzorců 4.4 – 4.10 je poměrně jednoduchý.

6.4.3.3 Vlastní model nelineární vláknenné struktury

Je vidět, že ANSYS podporuje jak nelineární tak ortotropní materiály. Pro vytvoření kombinovaného modelu, který by respektoval jak ortotropní anizotropii, tak nelinearitu v ose vláken – však nemá žádný vlastní nástroj. Je tedy nutné vytvořit vlastní metodu pro výpočet chování takové struktury.

Nová metoda spočívala v použití ortotropní materiálové formulace. Tři aproximace nelineárního chování vláken byly simulovány třemi různými ortotropními materiály s Youngovými moduly v ose vláken E_{low} , E_{medium} a E_{high} .

Základem metody byly smyčka, která z vypočtených hodnot napětí na jednotlivých elementech určovala, jestli je potřeba změnit materiál elementu. Smyčka se opakovala buď do maximálního počtu kroků, nebo se ukončila v okamžiku, kdy napětí na každém elementu anulu odpovídalo jeho materiálovému modelu. Zjednodušené schéma vývojového diagramu modifikační smyčky je na obrázku 6.6.



Obr. 6.6: Zjednodušený vývojový diagram modifikační smyčky vlastní metody simulace nelineární vlákenné struktury .

Protože jsou hlavní použité výzkumy [6] značně komplexní, byla pro účely diplomové práce využita pouze část z nich. Čtyři naměřené nelineární křivky, každá interpretovaná třemi Youngovými moduly, jejich vzájemný přechod - nejdou na model vhodně aplikovat. Program ANSYS nedovoluje definovat materiál jehož konstanty by se měnili s určitou vzdáleností. Pro věrnou simulaci podle naměřených křivek ve čtyřech oblastech anulu by se materiálové konstanty musely vypočítávat ze vzdáleností od všech čtyř oblastí, kde byly změřeny. Pakliže bychom chtěli takovýto přechod naprogramovat pomocí smyčky, bylo by to implementačně složité.

Hlavním aplikačním problémem je však fakt, že pro každý sloupec elementů (elementy se stejnou souřadnicí x a y) by musel být vygenerován vlastní materiálový model. V našem případě ve skutečnosti tři – pro tři části nelineární křivky. Při hrubé síti by šlo přibližně o 600 materiálů. Pro jemnější síť by počet samozřejmě narůstal. Pro kontrolu jestli deformace odpovídá správnému materiálu z nelineární křivky by program potřeboval určitý druh databáze. Aplikace pro výpočet na běžně dostupném typu počítače se zdá vyloučená.

Vlákna anulu tedy byla modelována jedinou nelineární křivkou, odpovídající vláknům z vnitřní dorsální oblasti. Ze čtyřech křivek celého výzkumu [6] je tato nejvíce lineární. Protože nebylo cílem práce zjišťovat nejkritičtější kombinace pohybů při kterých se očekává přenos síly vnějšími pevnějšími lamelami, soustředila se práce na vhodnou simulaci vnitřních částí anulu, ve kterých dochází nejčastěji k protržení.

6.4.3.4 Srovnání orientace vláken v lamele do správného směru

Kolagenní vlákna v jednotlivých radiálních lamelách svírají se středovou osou ploténky určitý úhel. Z výsledků měření [6] je patrné, že tento úhel je proměnlivý jak směrem od vnitřních lamel k vnějším, tak i v jedné samotné lamele. Závislost sklonu vlákna v lamele je jednou ze základních charakteristik ploténky. Změny sklonu vlákna s ohledem na hloubku vnoření lamely je poměrně malá. Oproti tomu je směr vlákna silně závislý na úhlové poloze. Sklon vláken jediné lamely může lineárně přecházet z 23° ve střední ventrální oblasti k 47° na střední dorsální části [6].

Z důvodů implementace byla pro účely modelu použita aproximace jedinou hodnotou svírajícího úhlu a to 45° . S ohledem na střídající se orientaci vláken u sousedních lamel skutečné ploténky, byla tato struktura zachována i v modelu.

Orientace vláken může být na jednotlivé elementy modelu anulu zanesena více způsoby:

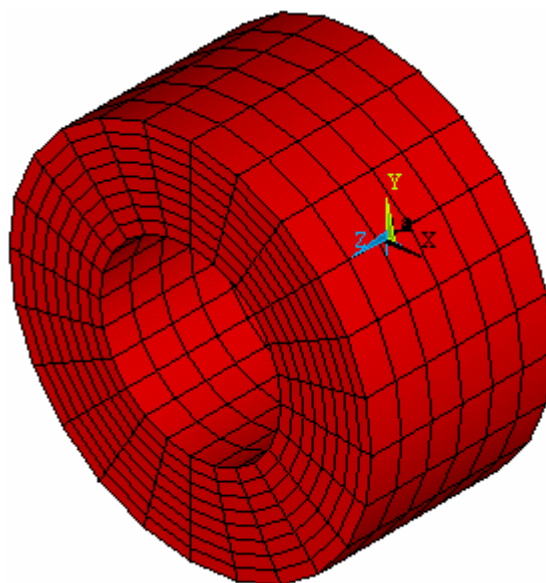
1. Objem anulu je rozdělen na mnoho sektorů, na kterých je vytvořen lokální souřadný systém odpovídající orientaci vláken. V těchto sektorech je posléze vytvořena síť elementů konečných prvků s ortotropními materiálovými vlastnostmi orientovanými podle příslušného lokálního souřadného systému.

2. Na anulu je nejprve vytvořená síť elementů konečných prvků ortotropního materiálu v jediném souřadném systému. Následně jsou pomocí cyklu elementy vybírány a souřadný systém modifikován podle polohy elementu.

Oba dva způsoby řešení byly při tvorbě modelu vyzkoušeny a to s obdobnými výsledky. Pro jemnější síť a jemnější krok tvorby se nakonec ukázal jako výhodnější druhý způsob. V první metodě se při jemnějším rozdělení objemů vyskytovaly při vytvoření sítě elementy nevhodných tvarů, především ve středové oblasti.

6.4.3.5 Sít' elementů

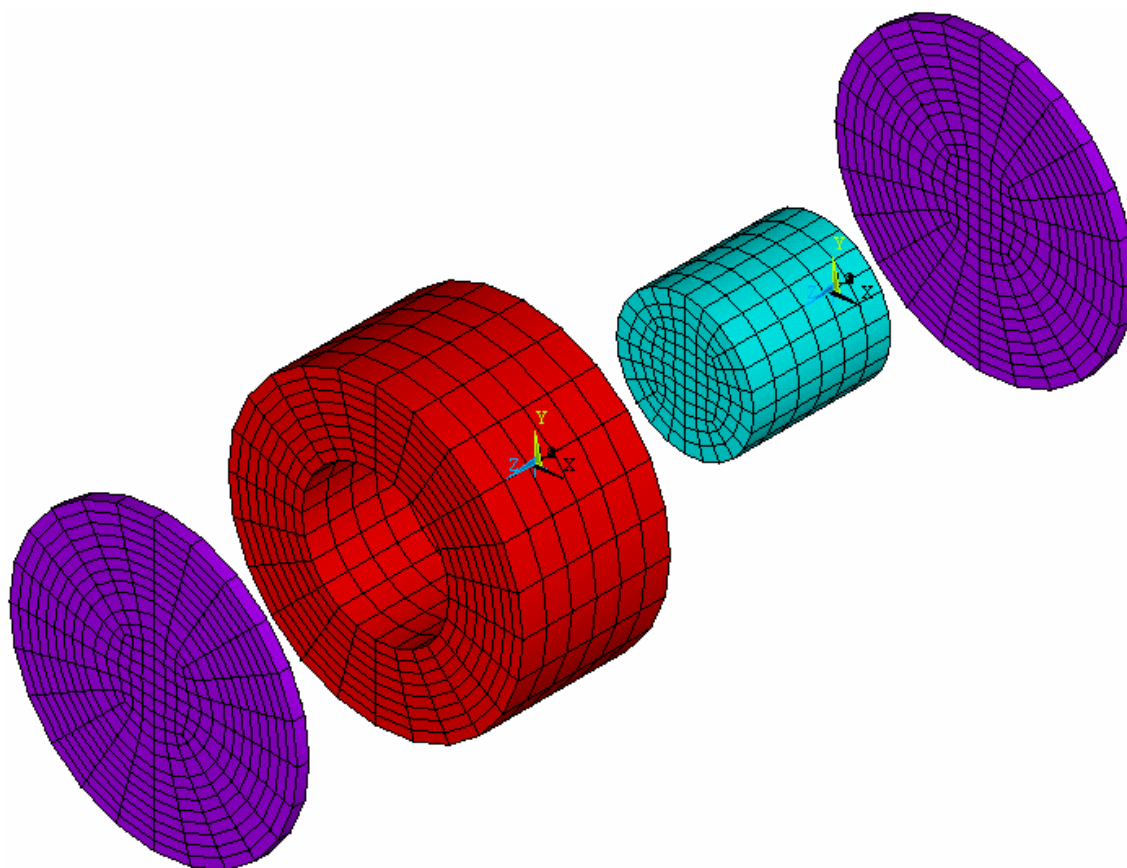
Stejně jako u chrupavčitých destiček byl pro anulus použit element SOLID186. Jeho vlastnosti jsou popsány výše.



Obr. 6.7: Síť elementů tvořící model anulu.

6.4.4 Výsledný model

Celý model meziobratlové ploténky je složením modelů chrupavky, nucleu a anulu:



Obr. 6.8: Složení jednotlivých částečných modelů do modelu celé ploténky.

6.5 Rozměry modelu

Protože je válcový model zjednodušením ploténky krční páteře, odpovídají jeho charakteristické rozměry skutečným rozměrům ploténky krční páteře:

Průměr ploténky: 1,2 cm.

Výška ploténky: 0,7 cm.

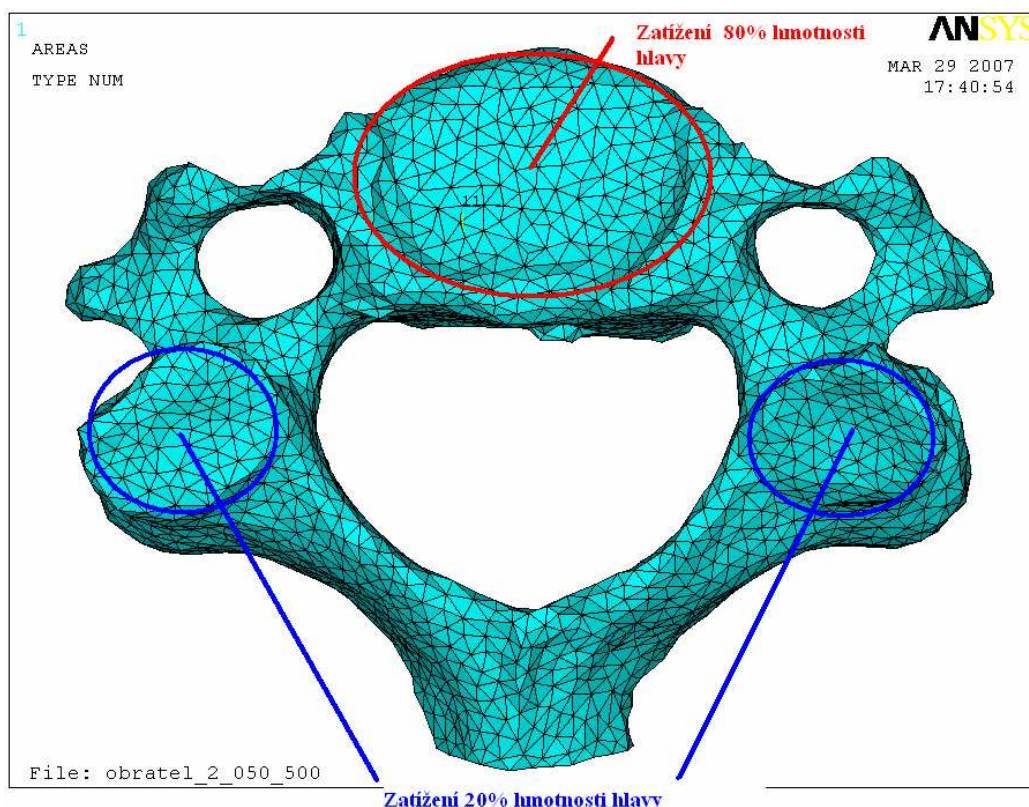
Geometrické rozměry byly tedy při simulaci uvažovány pouze pro ploténku krční páteře. Pro jiné oblasti páteře by musel být zjednodušený válcový model modifikován.

6.6 Zadání okrajových podmínek

Pro správné zavedení okrajových podmínek je nutno představit si v jaké interakci je ploténka s okolím.

Uvažujeme, že na ploténku působí pouze oba obratle, které spojuje.

Ve středním postavení přenáší obratel sousedící shora vliv hmotnosti hlavy cca 5,5 kg [14]. V oblasti těla obratle působí cca 80% hmotnosti hlavy. V oblasti dotyku kloubů sousedních obratlů působí cca 20% hmotnosti hlavy (Obr. 6.9). Toto rozložení hmotnosti platí pro rovnovážné postavení obratle.



Obr. 6.9: Rozložení zatížení hmotnosti hlavy na obratel v rovnovážné poloze [14].

Nejprve byla vyzkoušena simulace zatížením hmotností hlavy pomocí tlaku, spočteného z působící síly (z hmotnosti hlavy, gravitační konstanty a poměru jakou přenáší tělo obratle), kterou vydělíme plochou na kterou působí.

Tento způsob se ukázal jako nevhodný vzhledem k různě tuhým materiálům, z kterých je ploténka složena. Především v oblasti nucleu se ploténka silně prohnula a výsledný zdeformovaný tvar neodpovídal realitě.

Jako nutná se ukázala úprava, kdy byla na horní straně modelu vytvořena další vrstva materiálu, která simulovala kostěnou plochu těla obratle. Na její vrchní část pak působil výše spočtený tlak. Tato úprava se velmi osvědčila a pomohla, aby zjednodušený model lépe postihoval realitu. Materiál kostěné plochy byl v souladu s [14] aproximován jako izotropní, s těmito konstantami:

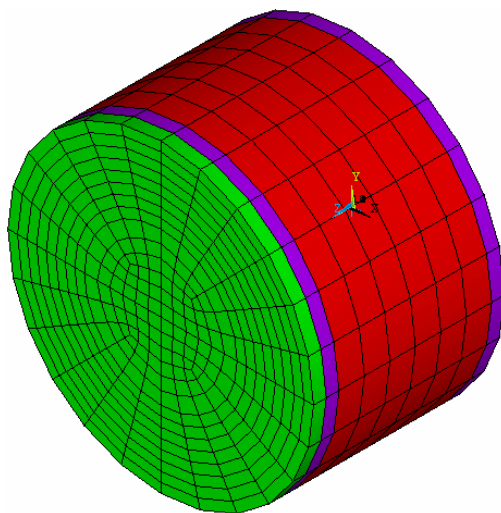
Youngův modul pružnosti:

$$E = 11,5 \text{ GPa},$$

Poissonův poměr:

$$\nu = 0,35.$$

Protože je tuhost tohoto materiálu prakticky o tři řády vyšší než dalších tkání ploténky, nebyly na této ploše pozorovány prakticky žádné větší deformace.



Obr. 6.10: Modifikace modelu přidáním další vrstvy simulující kostěnou vrstvu těla obratle – zelené elementy.

K simulaci probíhajících fyzikálních dějů byly na model zadány tyto okrajové podmínky:

1. Pro výpočet ve středním anatomickém postavení bez jakéhokoli pohybu hlavy byl na vrchní stranu kostěné vrstvy vytvořen konstantní tlak odpovídající svojí velikostí výše popsanému zatížení hmotností lidské hlavy ve středním anatomickém postavení.

2. Pro výpočet při úklonu byl na vrchní stranu kostěné vrstvy vytvořen lineárně vzrůstající tlak, jehož celkové působení odpovídalo svojí velikostí opět zatížení hmotností lidské hlavy. V obou případech se jedná o Neumannovu okrajovou podmínku.

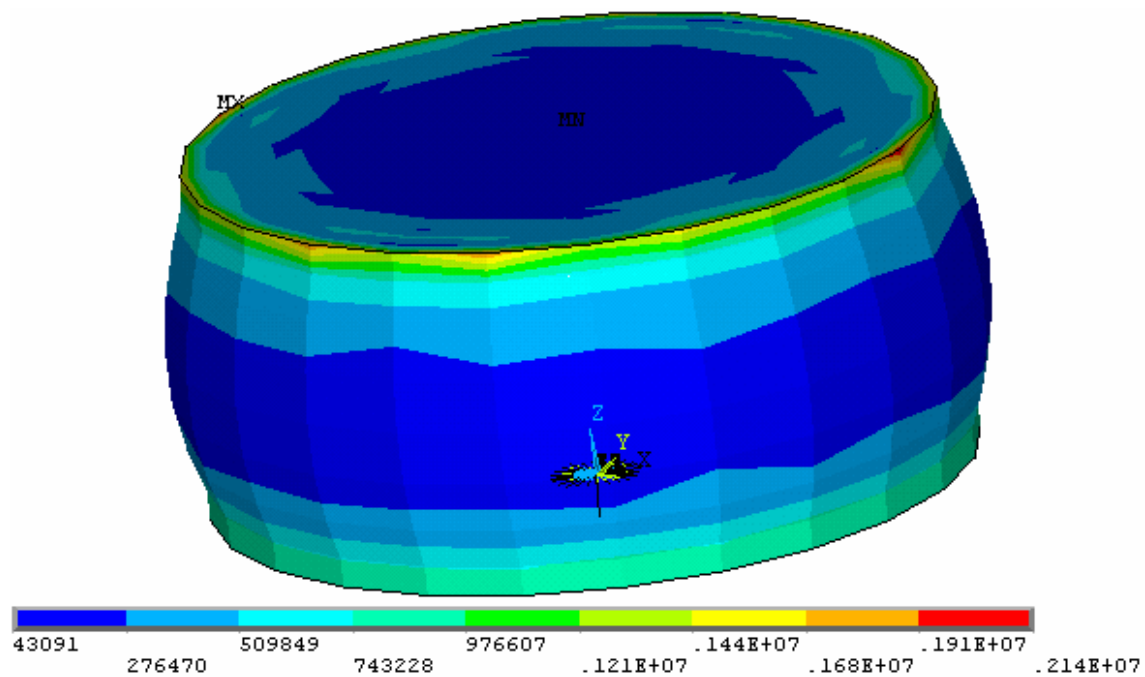
Pro omezení pohybu bylo na ploše styku ploténky se spodním obratlem (spodní strana spodní (inferior) chrupavky) zadáno nulové posunutí. Jde o Dirichletovu okrajovou podmínku s hodnotou celkového posunutí $u_x = u_y = u_z = 0$.

7. Výsledky zjednodušeného válcového modelu ploténky

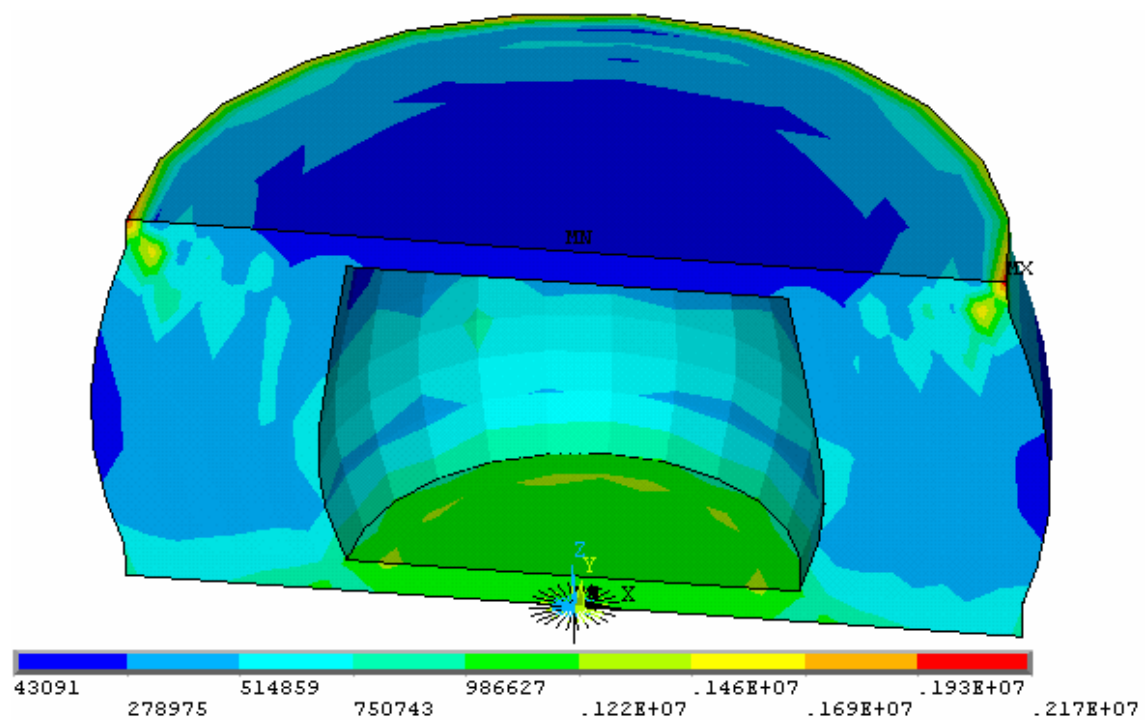
V této kapitole jsou představeny výsledky napěťově deformační analýzy na modelu vytvořeném podle kapitoly 6. Jsou ukázány hodnoty rozložení různých mechanických veličin jak na celé ploténce, tak na jednotlivých částech – především anulu. Důvod je jednoduchý – i když mohou lokální hodnoty elastického napětí například v chrupavčitých destičkách dosahovat vysokých hodnot – nejsou pro destičku takovým nebezpečím. Jednak není překročena mez pevnosti, navíc jsou naše chrupavky především určitým zjednodušením srůstu ploténky s tělem obratle. Klinická praxe ukazuje, že poruchy v meziobratlové destičce nastávají téměř výhradně v anulu. Proto je anulus oblast, kde budeme pečlivě sledovat rozložení jednotlivých mechanických veličin.

Při zobrazování výsledků je od počátku zanedbáno rozložení sil v kostěné vrstvě na horní straně modelu. Ta nám slouží pouze pro přenos sil a výzkum jejího namáhání je účinně popsán v [14]. Proto nebude tato část modelu ani v žádném z výstupů zobrazena.

7.1 Namáhání ploténky v rovnovážně poloze



Obr. 7.1: Rozložení celkového mechanického napětí v ploténce v rovnovážné poloze.



Obr. 7.2: Rozložení mechanického napětí v řezu ploténkou bez nucleu.

Jako první bylo simulováno zatížení ploténky v rovnovážné poloze. Na ploténku byly zavedeny okrajové podmínky popsané v části 6.6. Byla využita vlastní metoda pro reprezentaci nelineárního materiálu s maximálně deseti průchody modifikační smyčkou. Bylo zjištěno poměrně očekávané rozložení sil v ploténce.

Z celkového rozložení mechanického napětí (obr. 7.1) je ihned vidět jeden ze základních nedostatků modelu. Je jím velká koncentrace mechanického napětí při okrajích chrupavčitých destiček. Je to dáno především jejich geometrií – hranami, na kterých dochází ke koncentraci napětí. Protože jsou tyto destičky určitým přechodem, srůstem ploténky a těl obratlů, i pro velkou pevnost chrupavky – nemusí nás větší hodnoty mechanického napětí znepokojovat.

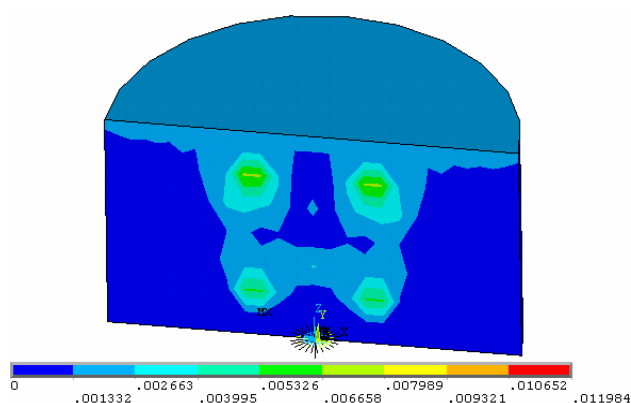
Koncentrace napětí je i na okrajové vrstvě anulu v místě styku s chrupavčitými destičkami. Je to dáno skokovou změnou materiálových vlastností modelu, ve skutečnosti je však tato změna pozvolná a jednotlivá vlákna anulu do chrupavek zarůstají. Tyto lokální hodnoty velkých mechanických napětí tedy chápeme jako chybu modelu.

Z rozložení (obr. 7.1 a 7.2) je patrné že hodnoty mechanického napětí jsou prakticky symetrické podle osy Z.

Pro ověření správné funkce nucleu je vhodné zobrazit si rozložení deformací.

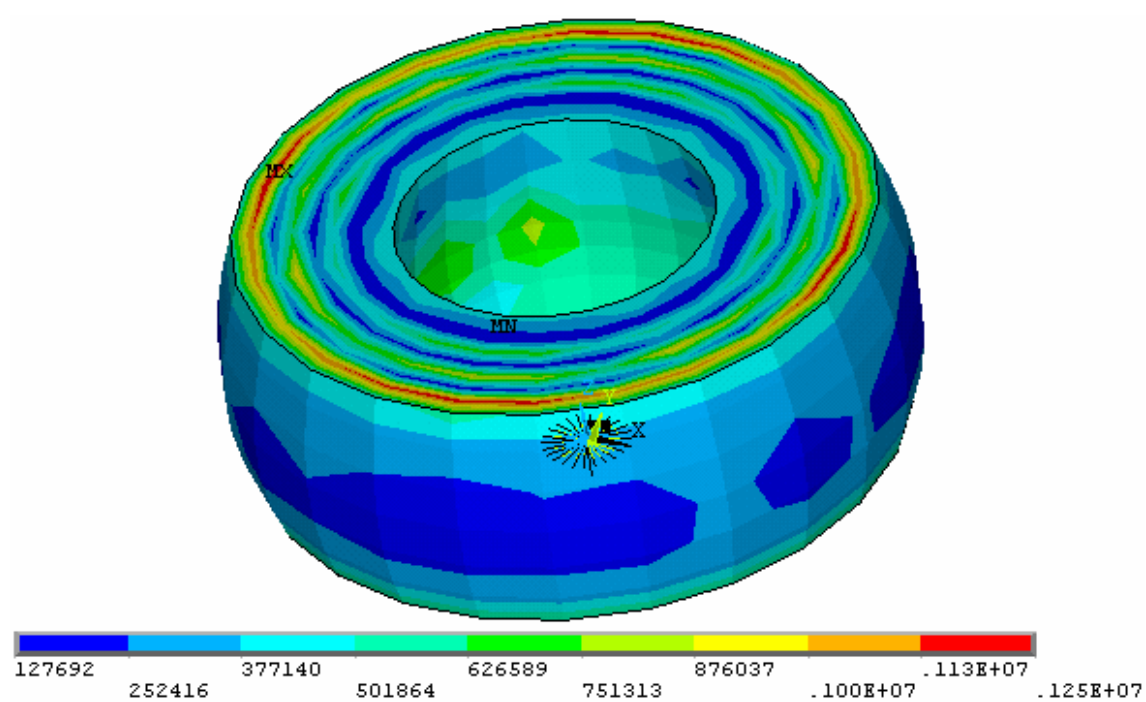
Je z něj patrné, že deformace je opět symetrická a ve vnitřní oblasti nucleu dochází k velkým pohybům, o mnoho řádu vyšším než například v anulu.

Můžeme tedy říci, že nucleus svojí roli plní dobře – změnou svého tvaru vyrovnává působící síly.

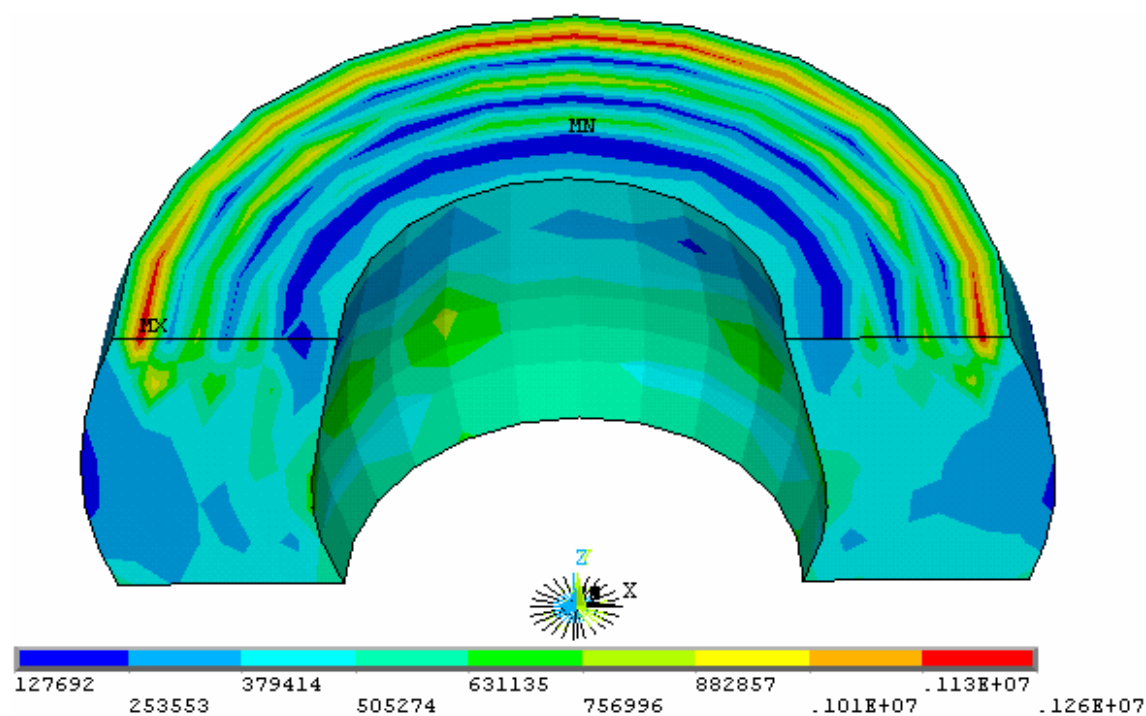


Obr. 7.3: Rozložení deformaci v ploténce.

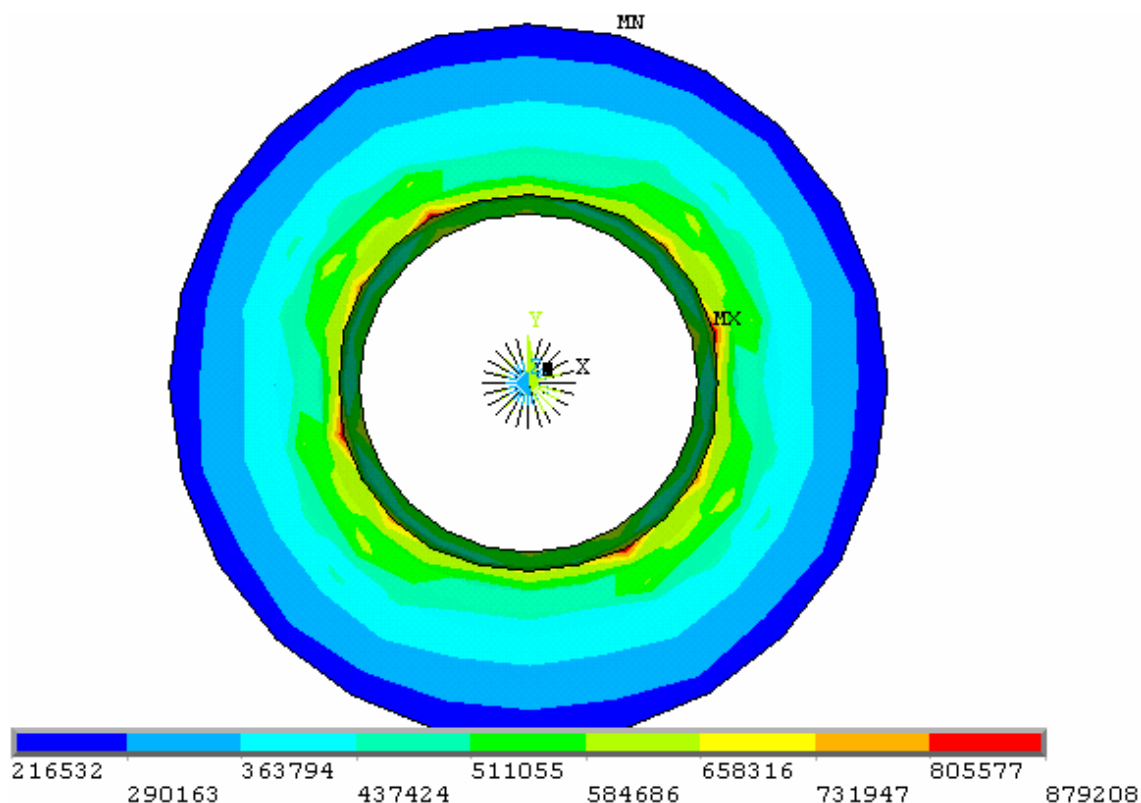
V dalším zkoumání chování modelu se zaměříme na kritickou oblast ploténky: anulus.



Obr. 7.4: Rozložení mechanického napětí pouze v anulu.



Obr. 7.5: Rozložení mechanického napětí anulu v řezu podle mediánní roviny.



Obr. 7.6: Rozložení mechanického napětí anulu v řezu podle transversální roviny.

Z rozložení mechanického napětí na anulu je jasně patrná i jeho vnitřní stavba. Protože mají vlákna sousedních lamel různou orientaci, zapojují se také různě do přenosu jednotlivých sil. Na horní straně tedy můžeme vidět velkou koncentraci mechanického napětí na místech kopírujících geometrii lamel.

Jde opět o výše popsanou chybu modelu při skokových změnách materiálových vlastností. O skutečném chování anulu se tedy lépe dozvíme z vhodně zvoleného řezu.

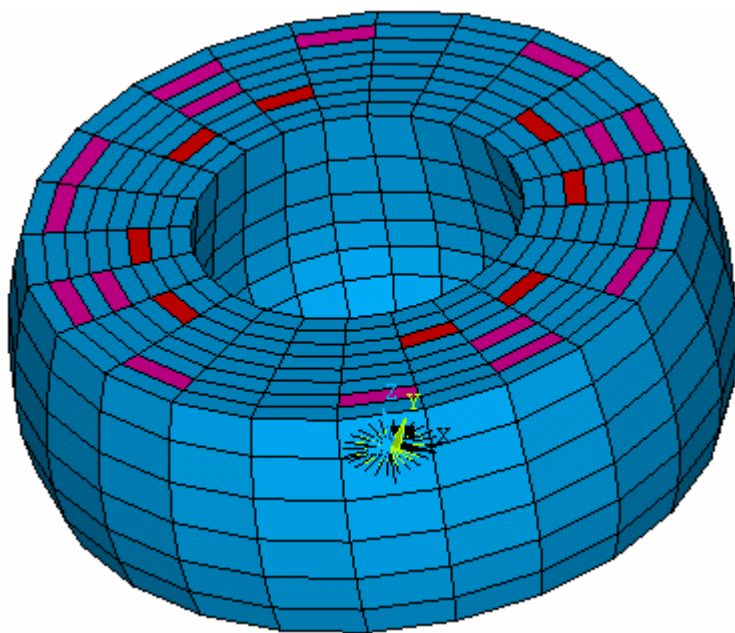
První řez v mediánní rovině (svislý řez) nám ukazuje že maxima napětí se opravdu nacházejí pouze v horní části anulu. Zbytek anulu se nachází v oblasti napětí, při kterém nehrozí nebezpečí přetrhnutí vláken.

Druhý řez v půlce výšky anulu podle transversální roviny ukazuje prakticky osově symetrické hodnoty rozloženého napětí. Mechanické napětí je nejmenší na vnější vrstvě a směrem k vnitřní lamelě roste. Maximum pak nastává podél celé linie vnitřní strany anulu v místě styku s nucleusem.

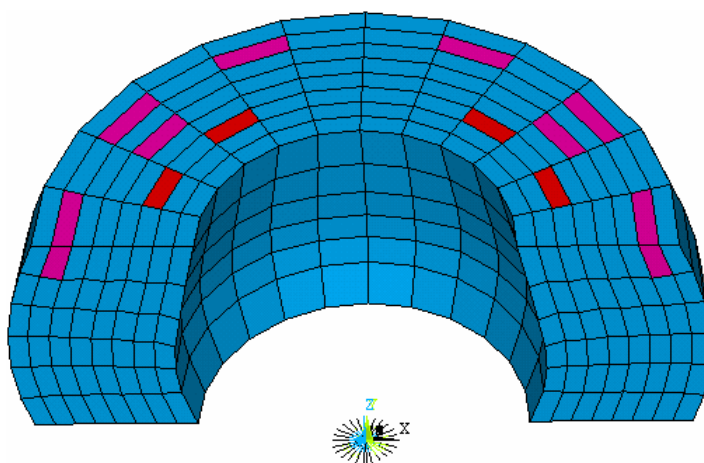
K zobrazení funkčnosti vlastní nelineární metody s modifikací materiálů elementů, je vhodné si zobrazit jednotlivé materiály na elementech anulu. Z obrázků je patrné že rozložení modifikovaných elementů je taktéž symetrické.

Elementy materiálu v nejméně namáhané části nelineární křivky jsou zobrazeny červenou barvou, elementy střední části modrou barvou a konečně nejvíce namáhané elementy v třetí části nelineární charakteristiky mají barvu fialovou.

Je patrné, že vlastní nelineární metoda funguje právě tak jak požadujeme a věrně simuluje nelineární materiál.

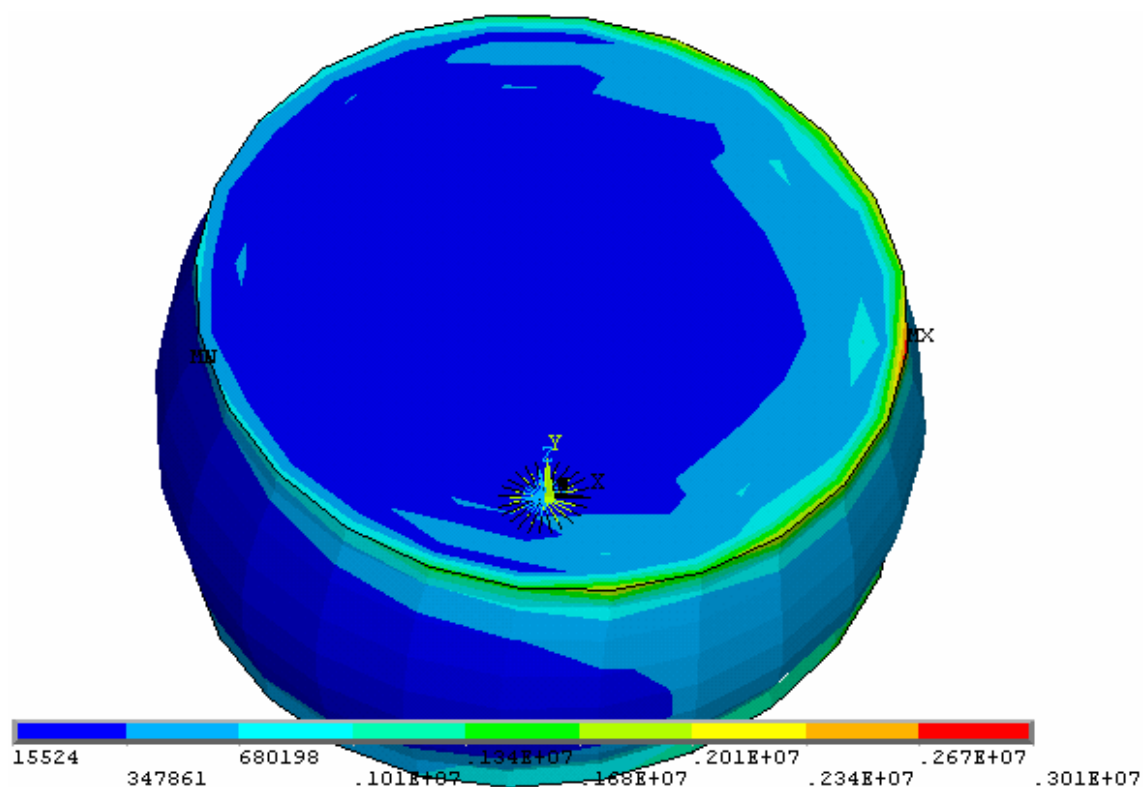


Obr. 7.7: Zobrazení modifikovaných elementů anulu.

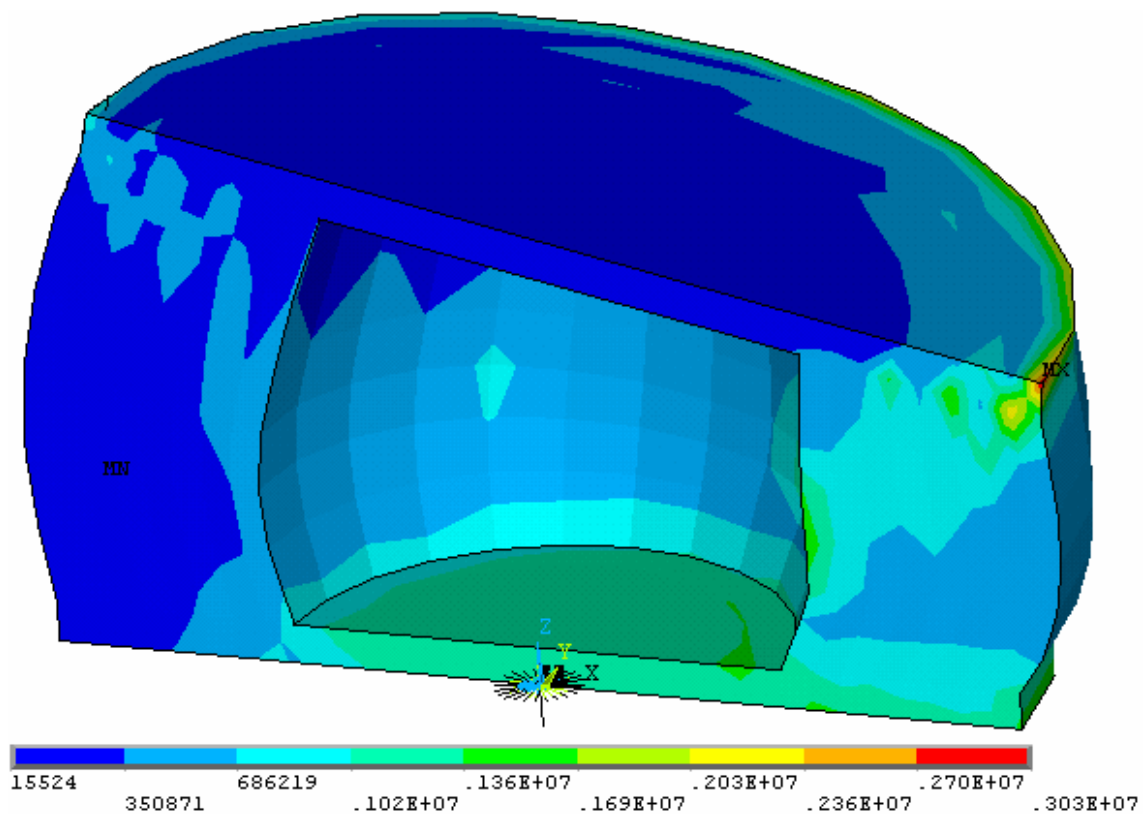


Obr. 7.8: Zobrazení modifikovaných elementů v řezu anulu.

7.2 Namáhání ploténky při úklonu/záklonu/předklonu



Obr. 7.9: Rozložení celkového mechanického napětí v ploténce při úklonu/záklonu.



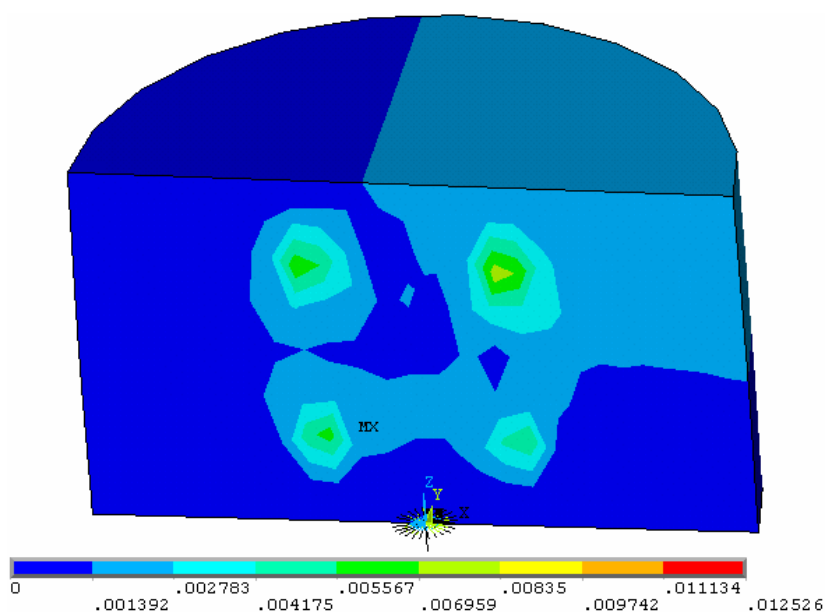
Obr. 7.10: Rozložení mechanického napětí v řezu ploténky bez nucleu.

Protože zjednodušený válcový model má kruhový tvar a ve všech směrech stejnou strukturu není rozdíl při simulaci úklonu/záklonu/předklonu. Tento rozdíl by se projevil při aplikaci na skutečnou geometrii ploténky, která má spíše ledvinovitý tvar. Důležitá je také struktura, kdy je například anulus různě široký ve ventrální a dorsální části.

Na model byly zavedeny okrajové podmínky pro úklon popsané v části 6.6. Jednotlivé osy a roviny byly v souladu s rovinami těla zavedeny pro úklon.

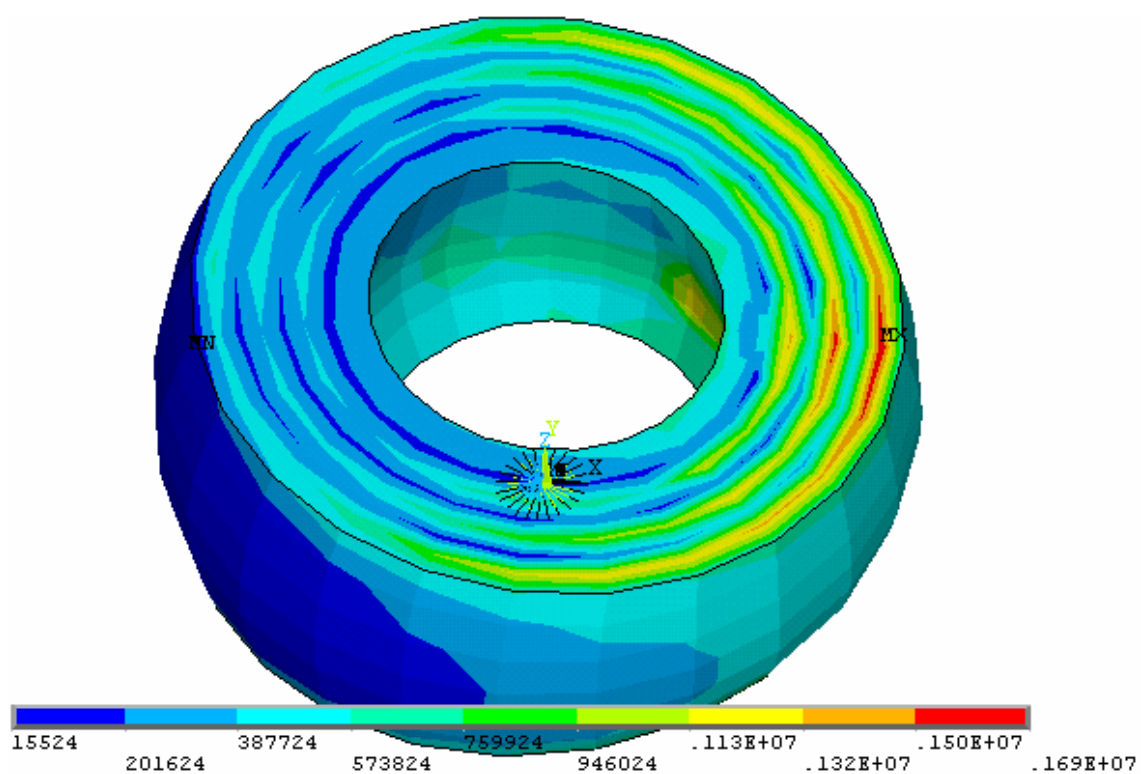
Na výsledném rozložení je opět patrná chyba modelu popsaná u analýzy zatížení ploténky v rovnovážné poloze. Pakliže se podíváme na další rozložení mechanického napětí – je jasně patrné, že toto rychle roste směrem ke straně úklonu.

Pro kontrolu funkce nucleu opět zobrazíme deformaci na původní geometrii. Ukazuje se (obr. 7.11) opět velký pohyb tekutiny v nucleu a samozřejmě jistý pohyb vrchní části celé ploténky směrem ke straně úklonu.

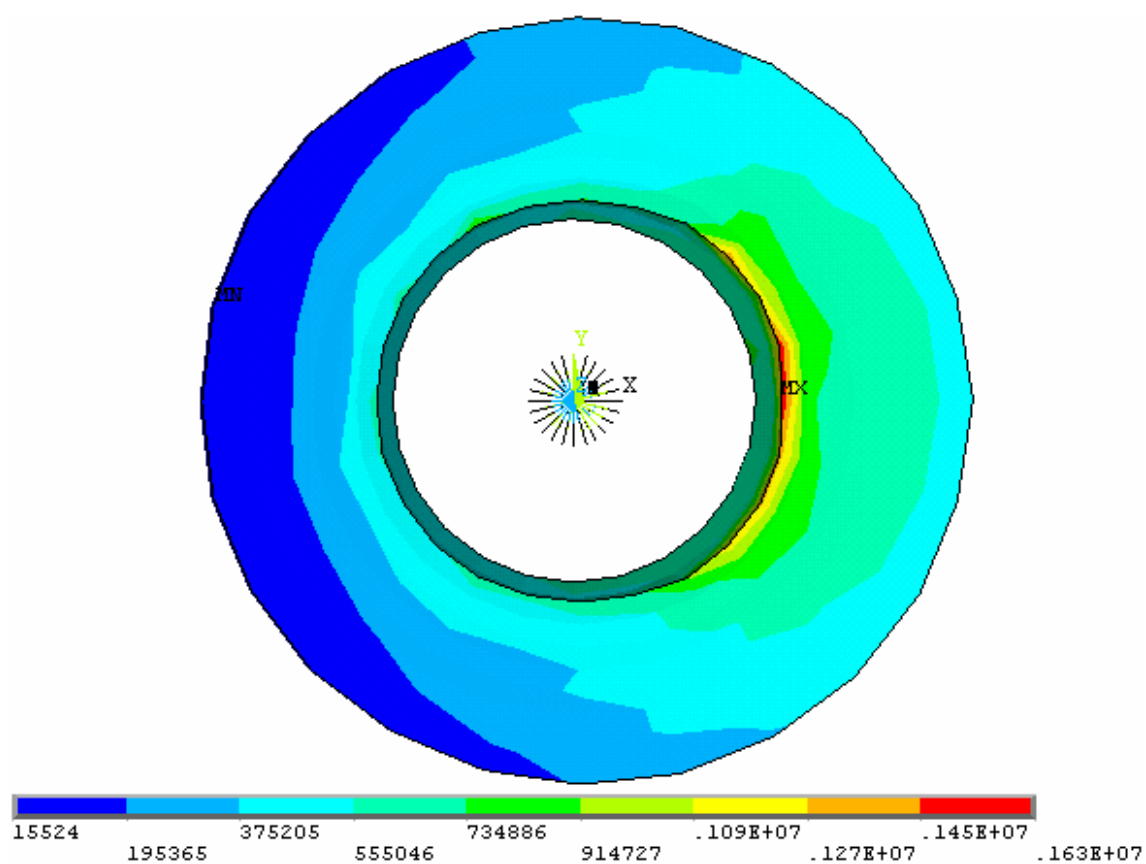


Obr. 7.11: Rozložení deformace v ploténce.

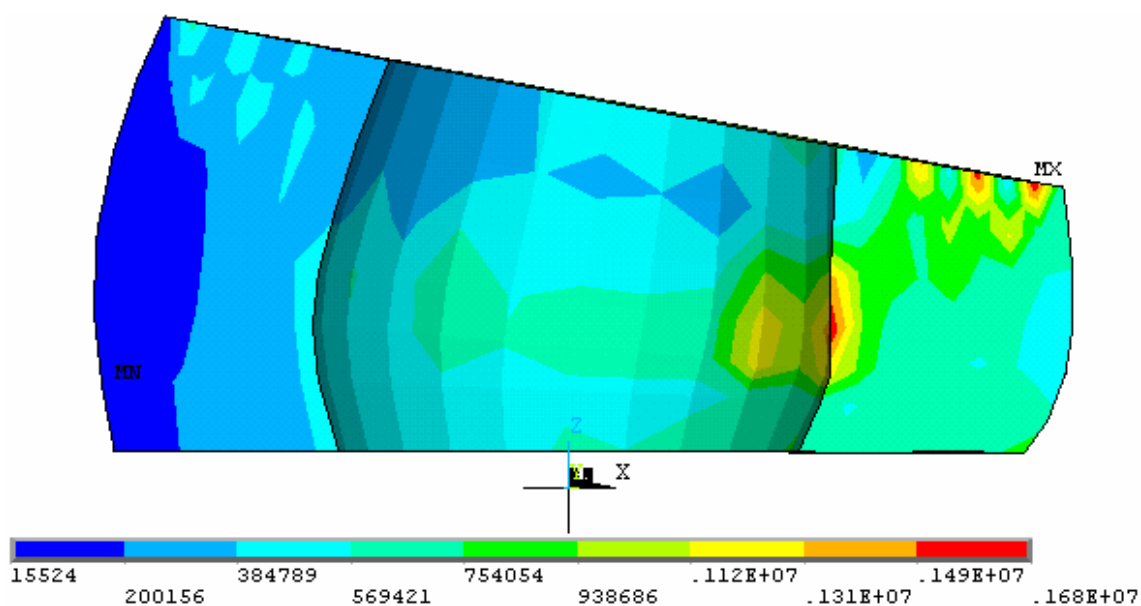
Pro další zkoumání ploténky se opět zaměříme na její nejdůležitější část – anulus.



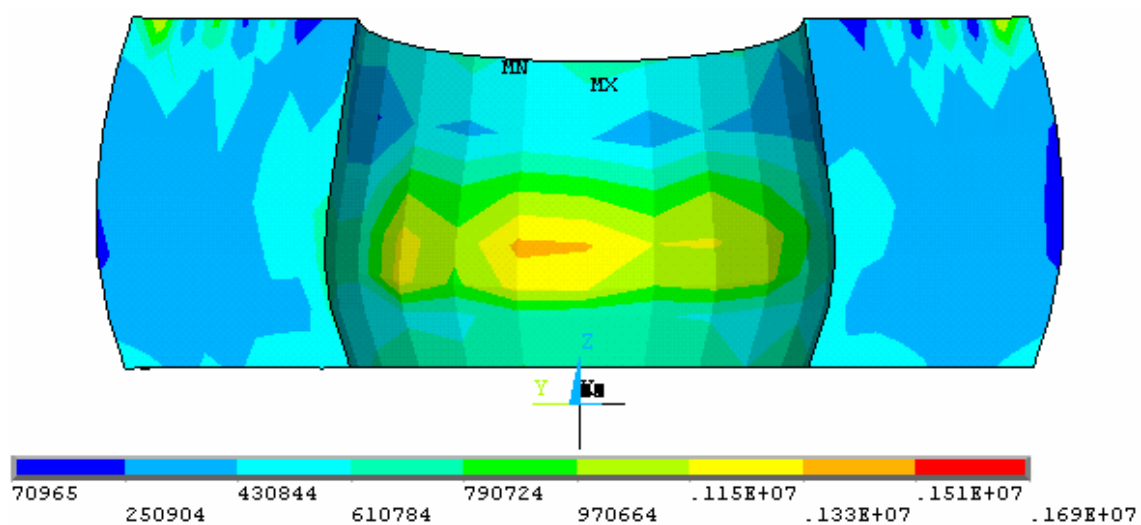
Obr. 7.12: Rozložení mechanického napětí pouze v anulu.



Obr. 7.13: Rozložení mechanického napětí anulu v řezu podle transversální roviny.



Obr. 7.14: Rozložení mechanického napětí anulu v řezu podle frontální roviny.

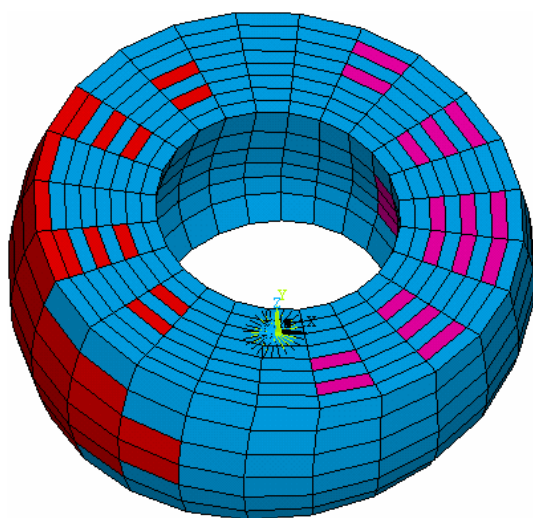


Obr. 7.15: Rozložení mechanického napětí anulu v řezu podle mediánní roviny.

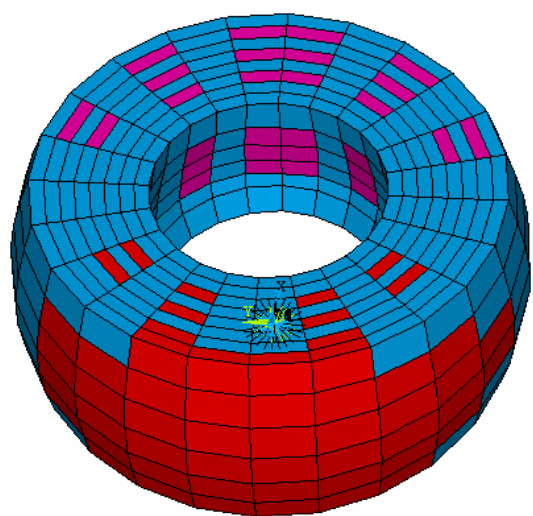
Na zobrazených rozloženích mechanických napětí je opět jasně patrná vnitřní struktura anulu – lamely. Pakliže zanedbáme maximum napětí způsobené chybou, objevuje se nám oproti simulaci v rovnovážné poloze jedna výrazná oblast zvýšeného napětí. Nachází se na vnitřní straně anulu v oblasti úklonu.

Tato oblast je zřejmá na všech zobrazených řezech. Napětí v tomto místě dosahuje už hodnot, kdy existuje možnost přetržení vláken anulu.

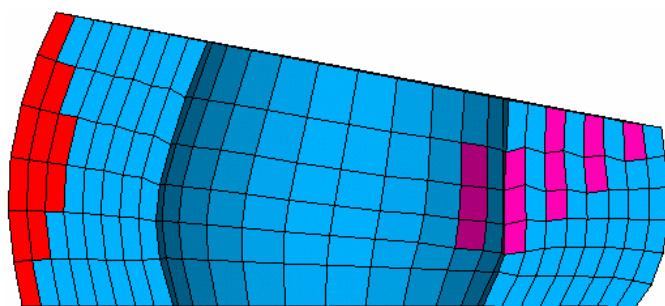
Pro zjištění jakým způsobem se projevila vlastní metoda simulace nelineárních materiálů opět použijeme zobrazení materiálů na jednotlivých elementech anulu.



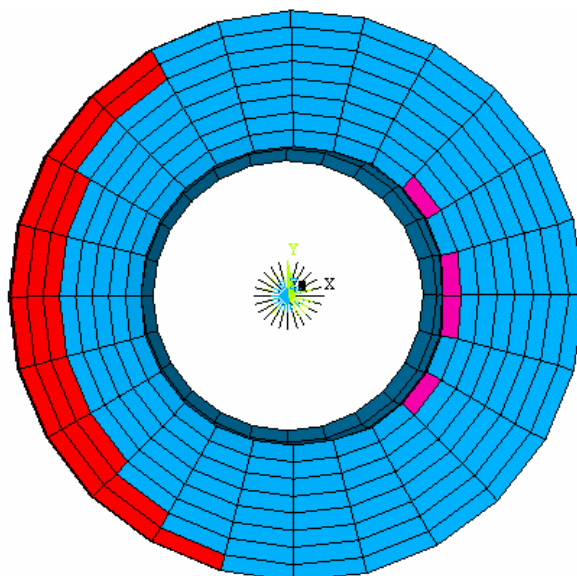
Obr. 7.16: Zobrazení modifikovaných elementů anulu.



Obr. 7.17: Zobrazení modifikovaných elementů anulu.



Obr. 7.18: Zobrazení modifikovaných elementů v řezu anulu.



Obr. 7.19: Zobrazení modifikovaných elementů v dalším řezu anulu.

Na modelu je tentokrát výrazné zastoupení všech tří typů elementů reprezentujících materiál ve třech různých částech nelineární křivky. Můžeme vidět symetrii odpovídající aplikovaným okrajovým podmínkám.

Při tomto druhu zatížení vlastní metoda simulace nelineárního materiálu ukazuje svojí výhodnost a účinnou funkčnost.

8. Model meziobratlové ploténky se skutečnou geometrií

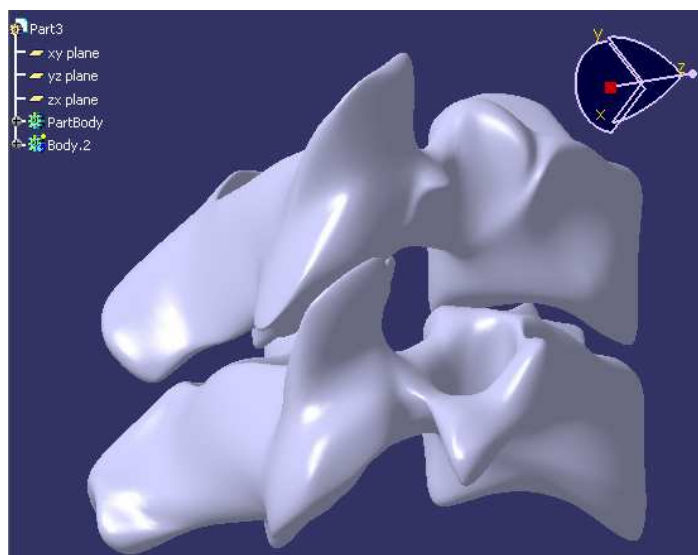
Získané materiálové formulace a metody ze zjednodušeného válcového modelu by měli vést k uplatnění na skutečné geometrii meziobratlové ploténky. Získání takové geometrie však není nejjednodušší.

Protože se jedná o měkkou tkáň, nelze stavbu a geometrii ploténky zjistit například z běžného rentgenu. Velmi často získávají vědecké týmy stavbu z počítačových tomografií s vysokým rozlišením, nebo na základě pitev. Protože ani jedna z obou možností nebyla v našem případě dostupná, musela se geometrie a vnitřní struktura ploténky získat jinak.

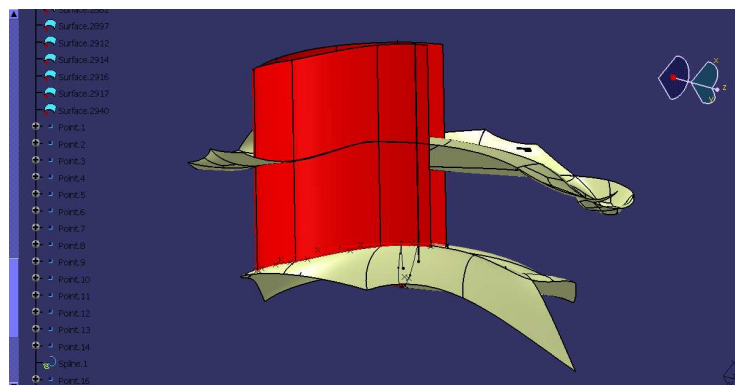
Byla zvolena rekonstrukce vnější geometrie ploténky z objemu vymezeném postavením dvou sousedních obratlů – v našem případě C3 a C4. Vnitřní stavba pak byla vytvořena s ohledem na stavbu zobrazenou v odborné literatuře a vědeckých pracích.

Protože vytvoření této struktury nebylo součástí této diplomové práce a nepodařilo se jí uskutečnit v termínu – nebylo možné získané materiálové formulace na ní použít.

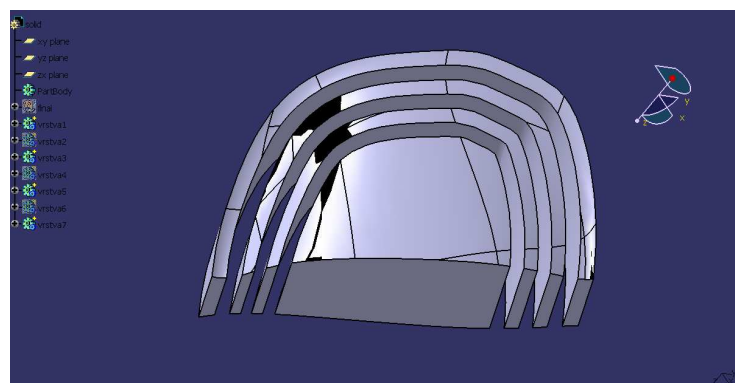
V blízké budoucnosti se však jistě podaří vytvořit tuto funkční geometrii a získané znalosti na ní aplikovat.



Obr. 8.1: Ukázka z práce vedoucí k vytvoření skutečné 3D geometrie ploténky.



Obr. 8.2: Ukázka z práce vedoucí k vytvoření skutečné 3D geometrie ploténky.



Obr. 8.3: Ukázka z práce vedoucí k vytvoření skutečné 3D geometrie ploténky.

9. Srovnání s klinickou praxí

Protože nebylo možné model aplikovat na skutečnou geometrii ploténky, nelze s klinickou praxí srovnat místo, ve kterém dochází k největší koncentraci mechanického napětí a mělo by tedy vést na místo nejčastějšího výskytu porušení struktur ploténky.

Model odpovídající střednímu anatomickému postavení bez jakéhokoli pohybu ukázal rozprostření tlakové síly a malé namáhání anulu.

Model odpovídající úklonu/záklonu/předklonu ukázal místo koncentrace mechanického napětí na vnitřní straně anulu. Napětí v tomto místě dosahuje hodnot, kdy existuje možnost přetržení vláken anulu. Pakliže by došlo k vytvoření mikroskopické trhliny v namáhaném místě, nemusí to jistě ihned vést k prolapsu ploténky. K prolapsu by pravděpodobně došlo při dalších pohybech, například při úklonu na druhou stranu, kdy by na roztaženou trhlinu anulu silně tlačila tekutina nucleu.

Nutno podotknout že uvedené hodnoty napětí se pouze dotýkají hranice při kterých by mohlo dojít k porušení struktury anulu. Jako kritické pohyby jsou nejčastěji uváděny [13] kombinace rotace a úklonu, případně rotace a tlaku. Tyto složité kombinované pohyby nebyly předmětem zkoumání, ale jistě by pomohly spolu se skutečnou geometrií ploténky na další vylepšení modelu.

Závěr

Zadané cíle diplomové práce byly splněny. Byly stanoveny okrajové podmínky odpovídající reálným druhům zatížení ploténky. Na základě zjištěných materiálových formulací byl vytvořen zjednodušený válcový model, který úspěšně modeluje chování ploténky.

Přes poměrně složitou strukturu anulu s nelineárními vlákny, byla vytvořena vlastní metoda simulace takového materiálu, která ukázala svoji velkou účinnost. Její vytvoření je jedním z přínosů této diplomové práce.

Dalším přínosem práce je jistě množství shromážděného a aplikovaného vědeckého materiálu. Jde o jednu z prvních prací zaměřenou na simulaci ploténky v trochu opomíjené oblasti krční páteře.

Model by šlo ihned zdokonalit zvolením jemnější sítě konečných prvků, kdy použitá hrubší síť odpovídala hardwarovým prostředkům, na kterých byl model počítán.

Tento prvotní model bude jistě nadále zdokonalován. Například v oblasti materiálu anulu se nabízí další cesta v implementaci speciálních kompozitních elementů, které ANSYS nabízí.

Poznatky získané při konstrukci modelu popsaného v diplomové práci lze s úspěchem aplikovat na skutečnou geometrii ploténky a snadno tak dojít k modelu daleko více se blížícímu realitě.

Model může být nadále použit při tvorbě modelu celého páteřního segmentu, složeného z modelů obratlů, plotének a vazů. Vzhledem k již vytvořeným modelům obratlů se tato aplikace přímo nabízí. Model však může být rozveden i do jiných oblastí – například pro simulaci prolapsu ploténky jako probíhajícího děje. Další možností je využít model pro zkoumání nových terapeutických metod vedoucím k nápravám poškozených plotének, například vložením hydrogelu s aplikovanými kmenovými buňkami do oblasti nucleu.

Použitá literatura:

- [1] UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE. *Biomechanika*. [online]. [cit. 2008-03-01]. URL:<<http://biomech.ftvs.cuni.cz/pbpbk/kompendium/biomechanika/index.php>>
- [2] DYLEVSKÝ, Ivan. *Anatomie a fyziologie člověka*. Epava, 1998.
- [3] VOKURKA, Martin. HUGO, Jan. *Praktický slovník medicíny*. Maxdorf, 2004.
- [4] ČIHÁK, Radomír. *Anatomie 1*, Grada, 2001.
- [5] WINSTON, Robert. *Člověk*. Knižní klub, 2005.
- [6] HOLZAPFEL G.A., SCHULZE-BAUER C.A.J., FEIGL G., Regitnig P. *Single-lamellar mechanics of the human lumbar anulus fibrosus*. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 3:125-140, 2005.
- [7] EBERLEIN R., HOLZAPFEL G.A., FRÖHLICH M. *Multi-Segment FEA of the human lumbar spine including the heterogeneity of the annulus fibrosus*. Computational Mechanics, 34:147-163, 2004.
- [8] EBERLEIN, R., HOLZAPFEL, G.A., SCHULZE-BAUER C.A.J. *An anisotropic model for annulus tissue and enhanced finite element analyses of intact lumbar disc bodies*. Comput Methods Biomech. Biomed. Eng. 4: 209-229, 2001.
- [9] HOLZAPFEL G.A., *Biomechanics of soft tissue*. In: J. Lemaitre (ed.), "The Handbook of Materials Behavior Models", Volume III, Multiphysics Behaviors, Chapter 10, Composite Media, Biomaterials, Academic Press: Boston;1049-1063, 2001.
- [10] SHIRAZI-ADL, A., AHMED, A.M., SHRIVASTAVA, S.C. *Mechanical response of a lumbar motion segment in axial torque alone and combined with compression*. Spine 1986;11:914-927.
- [11] SHIRAZI-ADL, A. *Strain in fibers of a lumbar disc: analysis of the role of lifting in producing disc prolapse*. Spine 1996; 21:2570-2579.
- [12] LODYGOWSKI, Tomasz. KAKOL, Witold. WIERSZYCKI, Marcin. *Three-dimensional nonlinear finite element model of lumbar intervertebral disc*. Acta of Bioengineering and Biomechanics. Vol. 7, No. 2, 2005.
- [13] SCHMIDT, H., KETTLER, A., HEUER, F., SIMON, U., CLAES, L., WILKE, H. J., *Intradiscal Pressure, Shear Strain, and Fiber Strain in the Intervertebral Disc Under Combined Loading*, SPINE Vol. 32, Number 7, pp. 748-755.

- [14] SOUČEK, Tomáš. *Biomechanika obratle krční páteře v rovnovážné poloze*. Diplomová práce, FM TUL, 2007.
- [15] ANSYS, Inc. ANSYS Multiphysics™ - Product Detail. [online].
[cit. 2008-04-20]. URL: <<http://www.ansys.com/products/multiphysics.asp>>
- [16] ANSYS, Inc. Release 10.0 Documentation for ANSYS. Dokumentace k programu ANSYS Multiphysics 10.0. [aktualizace databáze: 2005-07-18]
- [17] DOLEŽAL, Radim. *Modelová vlastností piezokeramických měničů v průběhu polarizace*. Bakalářská práce, FM TUL, 2006.
- [18] KULÍŠEK, Viktor. *Návrh a analýza kompozitních konstrukcí*. . [online].
[cit. 2008-04-20]. URL: <<http://mechanika.fsid.cvut.cz/documents/mkmpk.pdf>>
- [19] ČVUT. *Učební texty mechaniky*. [online]. [cit. 2008-04-20].
URL: <<http://mechanika.fsid.cvut.cz/education.php?section=learning>>

Struktura příloh na CD

1_Diplomová práce

- diplomová_práce_radim_doležal.pdf

2_Diplomová práce zdroj

- zdrojový_kód_simulace_ploténky.txt

3_Obrázky analýzy